

NOTAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

LEONARDO SOLANILLA

DIGITADO POR JAVIER G. RIVERA G.



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

IBAGUÉ, JUNIO DE 2010

RESUMEN. dghj

Índice general

Introducción	8
0.1. Conjuntos	9
0.2. Relaciones y funciones	10
0.3. Números naturales	11
0.4. Números enteros y racionales	13
0.5. Números reales	14
0.6. Números complejos y cuaternionicos	14
1. Funciones de una variable	15
1.1. Límites y Continuidad	15
1.1.1. Límite	15
1.1.2. Continuidad	16
1.1.3. Continuidad Uniforme	17
1.1.4. α -Hölder continua	17
1.1.5. Teorema del Valor Intermedio (Bolzano)	18
1.2. Diferenciabilidad	20
1.2.1. Reglas de Diferenciabilidad	22
1.2.2. Teorema de Rolle	26
1.2.3. Teorema del Valor Medio de Cauchy	27
1.2.4. Teorema del Valor Medio	28
1.2.5. Máximos y Mínimos	31
1.2.6. Expansión de Taylor	31
1.2.7. Teorema del Punto Fijo de Banach en $\mathbb{R}$	32
2. Funciones en varias variables	35
2.1. Nociones de partida	35

2.1.1. Norma	35
2.1.2. Bolas	35
2.1.3. Continuidad	36
2.1.4. Sucesión de Cauchy	36
2.1.5. Completitud	36
2.2. Teorema del punto fijo de Banach	36
2.3. El espacio $C_b^0(K)$	37
2.4. Teorema del Limite Uniforme	39
2.5. Norma del Supremo	39
2.6. El Teorema de Arzela-Ascoli	44
2.7. La Integral de Reimann	46
2.7.1. Propiedades de la Integral de Riemann	49
2.8. E. Diferencial Ordinaria de Primer Orden	52
2.8.1. Teorema de Picard-Lindeläf	52
2.9. Ejercicios en Clases	54
3. Espacios Métricos	67
3.1. Sucesiones en Espacios Métricos	69
3.1.1. Sucesión de Cauchy	69
3.2. Limites y Continuidad	70
3.3. Funciones u Operadores Lineales Continuos	72
3.4. Bola Abiertas y Bola Cerrada	76
3.5. Convexo	81
3.6. Completitud de $\mathbb{R}$	82
3.6.1. Axiomas de Completitud	82
Conclusiones	84
Bibliografía	85

Índice de figuras

1.	Diagrama de Venn	10
1.1.	$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$	16
1.2.	Uniformemente Continua	17
1.3.	Valor Intermedio	19
1.4.	Función Acotada	20
1.5.	$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$	20
1.6.	$f(I)$ y $f^{-1}(I)$	24
1.7.	Máximo Local y Mínimo Local	25
1.8.	Teorema de Rolle	26
1.9.	Valor Medio	28
1.10.	Punto Fijo	32
2.1.	Funciones Continuas en $[a, b]$	37
2.2.	$f_n(x) = x^n$ donde $n \in \mathbb{N}$	38
2.3.	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada	43
2.4.	Subsucesiones $x_n = x_{impar}$ y x_{par}	43
2.5.	Funcion Escalonada	47
2.6.	$\ f_n - f\ _I < \varepsilon$	48
2.7.	La Región P	53
2.8.	$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n x^2}$	57
2.9.	Comparación entre f_n y f_m	58
2.10.	$f_n(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{n})^2}$	60
2.11.	Comparación entre f_n y f_m	61
2.12.	$f_n(x) = x^n$	63
3.1.	Bola Abierta	76

Introducción

El problema

0.1. Conjuntos

En matemáticas, la palabra **conjunto** se emplea para representar una agrupación de objetos considerada como una sola entidad. Las agrupaciones, tales como *manada*, *banda*, *cuadrilla*, *camada*, *equipo* y *familia* son todos ejemplos de conjuntos. Los objetos que constituyen la agrupación se llaman **elementos** o **miembros** del conjunto, y de ellos se dice que **pertenecen** o que están **contenidos** en el conjunto.

Un conjunto puede ser definido de dos formas complementarias: por **extensión**, gracias a una lista completa de sus elementos, o por **intensión**, gracias a una propiedad que defina adecuadamente las características de los elementos del conjunto. Los conjuntos se designan con letras mayúsculas: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$; y los elementos con letras minúscula: $a, b, c, \dots, x, y, z$. Utilizamos la notación

$$x \in A$$

para indicar que x es un elemento de A o que x pertenece a A . Y si x no pertenece a A escribimos $x \notin A$.

Se dice que dos conjuntos Y y Z son iguales si constan exactamente de los mismos elementos, en este caso escribimos $Y = Z$.

A partir de un conjunto dado podemos formar nuevos conjuntos, llamados subconjuntos de aquél. Se dice que un conjunto B es un subconjunto del conjunto A , y escribimos $B \subseteq A$, cuando todo elemento de B pertenece también a A . La relación $B \subseteq A$ entre conjuntos se llama la relación de **inclusión**.

Proposición 1. *Se tiene que $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

Este teorema es consecuencia inmediata de las definiciones anteriores de igualdad e inclusión.

Existen operaciones entre conjuntos que a menudo encontramos en la educación escolar, tales como: complemento, unión, intersección. Se tratan de operaciones que corresponden a manejos proposicionales elementales, ligadas, respectivamente, a la negación, la disyunción y la conjugación, llamadas operaciones **booleanas**.

Sean A y B dos conjuntos. Definimos:

$$\text{Complemento: } A^c = \{x : x \notin A\} = \{x : \neg x \in A\}$$

$$\text{Union: } A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$\text{Intersección: } A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Estas operaciones pueden visualizarse de manera cómoda gracias a los conocidos **diagrama de Venn**.

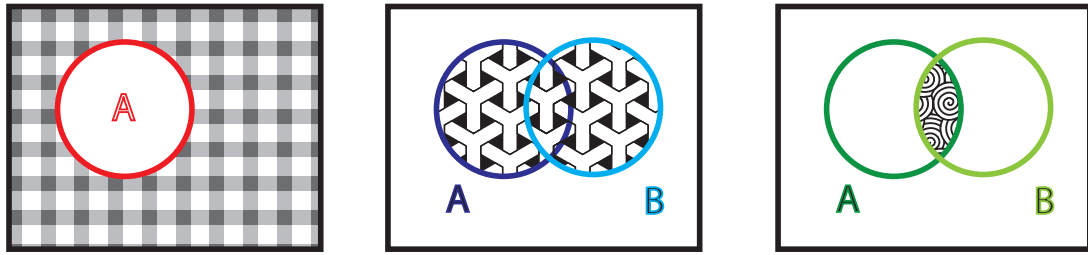


Figura 1: Diagrama de Venn

0.2. Relaciones y funciones

Sean X, Y dos conjuntos. El producto cartesiano de X y Y es el conjunto de parejas ordenadas

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Una **relación** R de X en Y es un conjunto de $X \times Y$: $R \subseteq X \times Y$. El **dominio** y **codo-**minio de esta relación se definen, como el subconjunto de elementos de X relacionados con algún elemento de Y , y como el subconjunto de elementos de Y relacionados con algún elemento de X .

Las funciones son cierto tipo de relaciones en las que se conserva una canonicidad simple en la composición, de tal manera que los elementos correlacionados dentro del ámbito de lo uno y no dentro del ámbito de los múltiple.

Sea R una relación de X en Y . Se dice que R es **función** si y solo si cumple las dos condiciones:

- i. $\text{dom}(R) = X$,
- ii. $\forall x(x \in X \wedge xRb \wedge xRc \rightarrow b = c)$.

Esto quiere decir, que todo elemento de X está relacionado con al menos un elemento de Y , y que todo elemento de X está relacionado con a lo sumo un elemento de Y . Las funciones se denotaran con las letras f, g , etc. Donde al único elemento de Y relacionado con x se le llama la **imagen** de x y se escribe $f(x)$.

Uno de los intereses básicos de las funciones consiste en poder comparar, gracias a ellas, ciertos conjuntos o estructuras. Sea f una función de X en Y .

- ✓ f es **1-1** o inyectiva si y solo si toda imagen posee a lo sumo una preimagen, es decir, si para todo $a, b \in X$ se tiene que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
- ✓ f es **sobre** o sobreyectiva si y solo si todo elemento del conjunto de llegada posee al menos una preimagen, es decir, para todo $y \in Y \Rightarrow$ existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$.
- ✓ f es **biyección** o biyectiva si y solo si f es a la vez 1-1 y sobre.

Dados dos conjuntos A y B decimos que A es equivalente (o equipotente) a B si es posible establecer una función cualquiera uno a uno de A sobre B y se escribe:

$$A \sim B$$

En las siguientes secciones del capítulo, miraremos cierto tipos de colecciones de números.

0.3. Números naturales

Primero se trabaja el conjunto de los números naturales, el cual, sirve de instrumento matemático empleado para contar. Se denotado así, $\mathbb{N}$. Este conjunto está caracterizado por los siguientes axiomas:

1. Existe una función inyectiva $\vartheta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N} \mapsto \vartheta(n) \in \mathbb{N}$, llamado, sucesor de n .
2. Existe un único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq \vartheta(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Si un subconjunto X de $\mathbb{N}$ es tal que $1 \in X$ y $\vartheta(X) \subset X$ entonces $X = \mathbb{N}$ (Principio de inducción).

Conocidos como **Axiomas de Peano**. El ultimo axioma es el de mas utilidad, ya que, se usa en las demostraciones por induccion. En el conjunto de los numeros naturales se definen dos operaciones fundamentales

Adicion: que asocia a cada par de numeros m, n su suma $m + n$

Multiplicacion: que hace corresponder al par de numeros m, n su producto $m \cdot n$

Estas operaciones se caracterizan por las siguientes igualdades, cuales sirven de definicion:

$+$	$\cdot$
$m + 1 = \vartheta(m)$	$m \cdot 1$
$m + \vartheta(n) = \vartheta(m + n)$	$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$

Las operaciones nombradas gozan de propiedades que todo mundo espera, asociativa, conmutativa, distributiva y cancelación. Ahora vemos brevemente cómo el principio de induccion en lso naturales evita la posibilidad de que existan cadenas infinitas descendentes en $\mathbb{N}$. Sea un conjunto B con una relación de orden $\leq$. Este conjunto esta bien ordenado si y solo si todo conjunto $X \neq \emptyset$, de B posee un minimo elemento m ($m \in X \wedge \forall b \in X : m \leq b$), esto es:

$$\forall X \subseteq B (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in B : m = \min(X))$$

Un conjunto A es **finito** si existe $n \in \mathbb{N}$ y una biyeccion f de $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a A . n representa el numero de elementos de A . Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$, se dice, limitado si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in A, n \leq k$.

Proposición 2. *El conjunto $A \subset \mathbb{N}$ es finito si y solo si A es limitado.*

Un conjunto B es **infinito** si no existe ninguna biyeccion f . Si B es infinito entonces existe una funcion inyectiva de los numeros naturales al conjunto B .

Un conjunto C es **enumerable** si C es finito. Todo subconjunto de un conjunto numerable es enumerable. Todo conjunto contenido en los naturales es enumerable.

Un axioma posterior en Teoría de Conjuntos postulará que $\mathbb{N}$ es en realidad un forma inicial de infinitud, esto se entiende como el primer conjunto infinito. A partir de $\mathbb{N}$ surgen los demas conjuntos usuales de numeros.

0.4. Números enteros y racionales

La idea básica en la construcción de los números enteros consiste en definir un universo de números en el cual puedan ser resueltas todas las ecuaciones lineales del tipo $x + y = z$. Esto se realiza gracias a la resta $y = z - x$, pero ésta no siempre existe en $\mathbb{N}$ pues la definición misma del orden en $\mathbb{N}$ exige que para resolver $x + y = z$ en $\mathbb{N}$ se debe tener $x \leq z$.

Los números positivos pueden representarse gracias a parejas de naturales (x, y) donde $x \geq y$, y los enteros negativos gracias a parejas de naturales (x, y) con $x \leq y$. De lo anterior, se infiere que una construcción auténtica de los enteros debe poder manejar:

- i. Parejas de naturales,
- ii. Procesos de identificación entre entes matemáticos. (relación de equivalencia)

Una relación de equivalencia generaliza de hecho las propiedades de la igualdad. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A no vacío. Si $a \in A$, la clase de equivalencia de a se define como el subconjunto de elementos de A relacionados con a bajo

$$R : [a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Ahora bien las clases de equivalencia de R constituyen así una suerte de compartimentación del conjunto subyacente A . Esta situación se llama una partición de A , como lo señalamos a continuación.

Sea A un conjunto no vacío. Una **partición** de A consiste en darse una colección no vacía $\mathcal{C}$ de subconjuntos de A con las propiedades siguientes:

- i. $X \in \mathcal{C} \rightarrow X \neq \emptyset$
- ii. $X, Y \in \mathcal{C} \wedge X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$
- iii. $\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X = A$

Una vez establecido este instrumental fundacional alrededor de las relaciones de equivalencia, clases de equivalencia y particiones, podemos abordar el caso particular de las identificaciones entre parejas de naturales.

Deseamos construir los enteros como clases de parejas de naturales, siguiendo las constataciones expresadas en las identidades

$$\begin{aligned}7 &= 7 - 0 = 8 - 1 = 9 - 2 = \cdots = (n + 7) - n = \cdots \\-2 &= 0 - 2 = 1 - 3 = 2 - 4 = \cdots = n - (n + 2) = \cdots\end{aligned}$$

Observe que, para cualquier de los dos casos, independientemente de la positividad o negatividad del número, las parejas (a, b) o (c, d) que pretendan poder representar al número verifican siempre $a - b = c - d$, es decir $a + b = b + c$.

0.5. Números reales

0.6. Números complejos y cuaternionicos

CAPÍTULO 1

Funciones de una variable

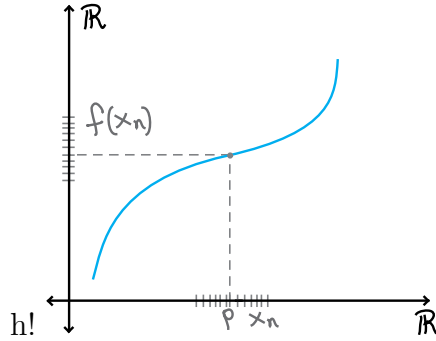
Con lo visto en el capítulo 0, ahora estudiaremos análisis matemático a una función de variable real, es decir: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto de los reales. Primero abarcamos las definiciones de límite y continuidad, luego sus consecuencias inmediatas como la continuidad uniforme, α -Hölder continua y el teorema de Bolzano (el valor intermedio). En una segunda instancia, definiremos la diferenciabilidad como el límite del incremento en la función sobre el incremento en x cuando este último incremento se anule (tiene a cero). Con esta definición resultan sus reglas: Reglas de diferenciabilidad para la suma, para el producto, etc. Y por último estudiaremos las causas y consecuencias de sus importantes teoremas tales como el Teorema de Rolle, del Valor Medio, del Máximos y Mínimos, de la expansión de Taylor y el Teorema del punto fijo de Banach en $\mathbb{R}$.

1.1. Límites y Continuidad

1.1.1. Límite

Definición 1. Sean $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) una función, decimos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$ si y solo si para toda sucesión $\langle x_n \rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

Teorema 1. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ que $\forall x \in D$ tal que $|x - p| < \delta$ y $|f(x) - y| < \varepsilon$.

Figura 1.1: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$

Demostración.

$\Leftarrow$). Sea $\langle x_n \rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ tenemos pues $\forall \delta > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |x_n - p| < \delta$. Sea $\varepsilon > 0$ determinemos primero δ y luego el $N \in \mathbb{N}$, se sigue que para $n \geq N$, $|x_n - p| < \delta$ entonces, por hipótesis, $|f(x_n) - y| < \varepsilon$, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ con esto, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$.

$\Rightarrow$)(por contradicción). $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D$ tal que $|x - p| < \delta$ pero $|f(x) - y| > \varepsilon$. Usemos esto para construir una sucesión, así: Para $n \in \mathbb{N}$, $\langle x_n \rangle = x$ correspondientemente que $\alpha = \frac{1}{n}$ esta sucesión satisface $|f(x_n) - y| > \varepsilon$ o sea, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ pero $|f(x_n) - y| > \varepsilon$ esto significa $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq y$ es decir $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq y$. $\diamond$

1.1.2. Continuidad

Definición 2. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$), $D \subset \mathbb{R}$, una función y $p \in D$, f es continua en p si $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. f es continua en D si lo es en cada uno de sus puntos.

Teorema 2. f es continua en p si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D$ tal que $|x - p| < \delta: |f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Lema 1. Suponga que $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $p \in D$ y $g(p) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para $x \in D$ $|x - p| < \delta$ se tiene $g(x) \neq 0$.

Lema 2. Suponga que $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en $p \in D$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $f + g$, $f \cdot g$ y λf son continuas en p . Si $g(p) \neq 0$ entonces f/g también es continua en p .

Corolario 1. *Las funciones polinómicas son continuas.*

Corolario 2. *Las funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que son continuas en $p \in D$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

1.1.3. Continuidad Uniforme

Definición 3. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) una función. f es uniformemente continua en D si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

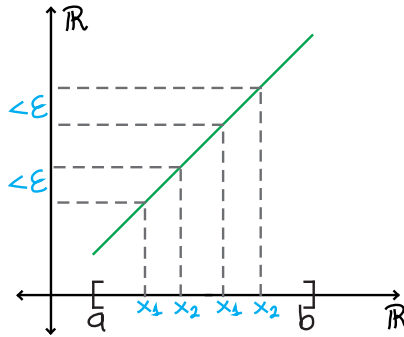


Figura 1.2: Uniformemente Continua

La diferencia crucial entre continuidad y continuidad uniforme es que en la primera δ depende solamente de ε en un punto, mientras que en la segunda, δ debe servir para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in D$ con $|x_1 - x_2| < \delta$.

Teorema 3. *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado, y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Definición 4. $C^0(D, \mathbb{R}) = C^0(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } f \text{ es continua en } D\}$.

1.1.4. α -Hölder continua

Definición 5. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) y $0 < \alpha < 1$, f es α -Hölder continua si para todo intervalo cerrado $I \subset D$ existe $m_I \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq m_I |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in I.$$

Si $\alpha = 1$ f se llama *Lipschitz* continua.

Es fácil ver que si $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ son α -Hölder continuas. Entonces $f + g$ y λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) también son α -Hölder continuas.

♣

Para todo $I \subset D$ existe $m_f, m_g \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq m_f |x - y|^\alpha, \quad |g(x) - g(y)| \leq m_g |x - y|^\alpha$$

Ahora

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &= |[f(x) - f(y)] + [g(x) - g(y)]| \end{aligned}$$

Por desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} |[f(x) - f(y)] + [g(x) - g(y)]| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq m_f |x - y|^\alpha + m_g |x - y|^\alpha \text{ por hipótesis} \\ &= (m_f + m_g) |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Y ahora para λf Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $I \subseteq D$ existe $m_I \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq m_I |x - y|^\alpha$, y por último

$$\begin{aligned} |\lambda f(x) - \lambda f(y)| &= |\lambda(f(x) - f(y))| \\ &= |\lambda| |f(x) - f(y)| \\ &\leq |\lambda| m_I |x - y|^\alpha \end{aligned}$$

1.1.5. Teorema del Valor Intermedio (Bolzano)

Teorema 4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f asume todos los valores k entre $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad $f(a) \leq f(b)$. Debemos probar que si $f(a) \leq k \leq f(b)$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = k$. Usando la traslación $f - k$, entonces basta considerar el caso $f(a) \leq 0 \leq f(b)$.

Construimos dos sucesiones. Sea $a_0 = a$ y $b_0 = b$. El resto de los términos de las sucesiones se encuentra como sigue para $a_{n-1} \leq a_n$ y $b_n \leq b_{n-1}$ con $a_n \leq b_n$, se calcula

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

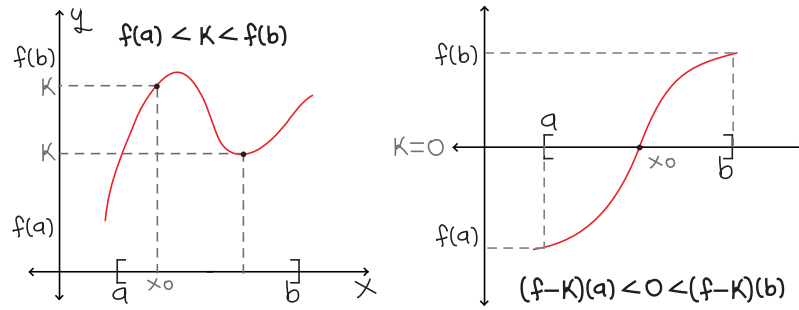


Figura 1.3: Valor Intermedio

Ahora bien por la tricotomía de los $\mathbb{R}$:

- ✓ Si $f(c_n) = 0$, hemos terminado.
- ✓ Si $f(c_n) < 0$, se pone $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.
- ✓ Si $f(c_n) > 0$, se pone $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$.

En los dos últimos casos

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \\ \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \end{cases}$$

entonces

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2}|b_n - a_n|.$$

La distancia en los primeros términos va ser L luego en el siguiente es $\frac{L}{2}$, después en el siguiente $\frac{L}{3}$ y así sucesivamente, lo cual implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$$

Y así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0.$$

Ya que $f(a_n) < 0$ y $f(b_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la continuidad de f implica que el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0) = 0.$$

◇

Teorema 5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es acotada en $[a, b]$, es decir, existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b],$$

también f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.

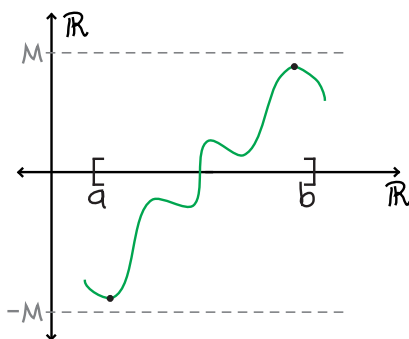


Figura 1.4: Función Acotada

1.2. Diferenciabilidad

Definición 6. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. f es diferenciable en $x \in D$ si y solo si

$$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \quad \xi \in D - \{x\}$$

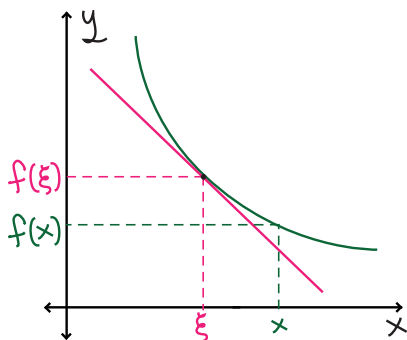


Figura 1.5: $f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$

Existe. La cual es similar a

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0, \quad x+h \in D$$

Cuando esto sucede, $f'(x) = \frac{df}{dx}$ es la derivada de f en x . Generalmente, $D = (a, b)$.

Teorema 6. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada $c = f'(x)$, $x, x_0 \in D$. f es diferenciable en x_0 si y solo si

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x),$$

donde $\phi(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0, \quad x \neq x_0$$

Demostración.

$\Rightarrow$). Si f es diferenciable en x_0 ,

$$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \quad \xi \in D - \{x\}$$

Construyamos una función

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

En verdad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \right) = c - c = 0$$

Así pues

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

$\Leftarrow$). Supongamos $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ y calculamos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c(x - x_0) + \phi(x)}{x - x_0}, \quad \text{con } x \neq x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right) = c = f'(x_0) \text{ EXISTE.}$$

◇

De manera equivalente $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ se puede escribir como

$$|f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)| \leq \psi(x), \quad \text{donde } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(x)}{x - x_0} = 0, \quad x \neq x_0$$

Corolario 3. Si f es diferenciable en x_0 , entonces f es continua en x_0 . El recíproco no es verdadero.

Demostración. Como f es diferenciable, f se puede escribir como

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0, \quad x \neq x_0$$

Tomamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (c(x - x_0) + \phi(x)) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(x - x_0) \left(c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right) \right] \\ &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Así, f es continua en x_0

◇

1.2.1. Reglas de Diferenciabilidad

Proposición 3. Sean $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un punto $x \in D$. Entonces $f + g$ y λf , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ son diferenciable en x donde cumplen las reglas

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

Las funciones diferenciables en un punto (ó un intervalo) forman un espacio vectorial.

Proposición 4. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en un punto $x \in D$. Entonces $f \cdot g$ es diferenciable en x y

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Y si $g(x) \neq 0$, se cumple además

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Teorema 7. (Regla de la cadena) Sean $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in D_1$ y $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(D_1) \subset D_2$, diferenciable en $f(x) \in D_2$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en $x \in D_1$, entonces

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} \cdot \frac{f(\xi) - f(x)}{f(\xi) - f(x)} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{f(\xi) - f(x)} \cdot \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{f(\xi) - f(x)} \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{✂} \end{aligned}$$

Tenemos un problema: Puede suceder que $f(\xi) = f(x)$

Existe solución: Utilicemos una función auxiliar.

$$G(\eta) = \begin{cases} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} & \text{si } \eta \neq y \\ \lim_{\eta \rightarrow y} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} = g'(y) & \text{si } \eta = y \end{cases}$$

Ya que g es diferenciable en D_2 . En particular si $y = f(x)$ $\eta = f(\xi)$, el limite existe. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{✂} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{f(\xi) - f(x)} \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} &= \lim_{\xi \rightarrow x} G(f(\xi)) \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

◇

Definición 7. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I es un intervalo real en una función.

♠ f es monótona creciente si $f(x_1) \leq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2$.

◇ f es monótona decreciente si $f(x_1) \geq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$.

♣ f es estrictamente monótona creciente si $f(x_1) < f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$.

♡ f es estrictamente monótona decreciente si $f(x_1) > f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$.

Proposición 5. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona (creciente ó decreciente) entonces f tiene inversa, es decir $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in I$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in f(I)$$

Además f^{-1} también es estrictamente monótona respectivamente.

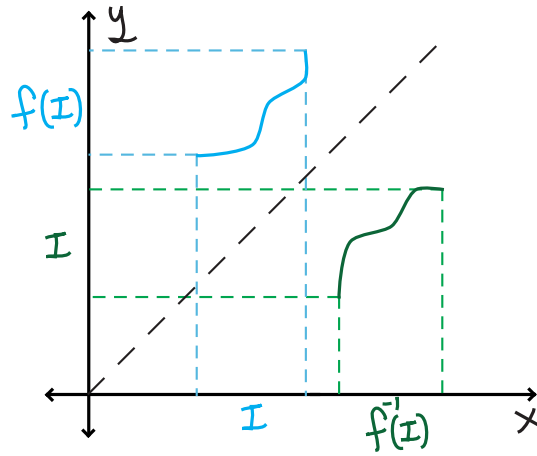


Figura 1.6: $f(I)$ y $f^{-1}(I)$

Teorema 8. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona (creciente ó decreciente) y diferenciable en $x \in I$. Entonces $f'(x) \neq 0$, y f^{-1} es diferenciable en $y = f(x)$, donde

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } x = f^{-1}(y)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow y} \frac{f^{-1}(\nu) - f^{-1}(y)}{\nu - y} &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\xi - x}{f(\xi) - f(x)}, \quad \text{donde } \nu \in (f(I) - \{y\}), \quad \xi \in (I - \{x\}) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{1}{\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

◇

Definición 8. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. f es dos veces diferenciable en $x \in D$ si f' es diferenciable en x . En este caso,

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = (f')'(x)$$

Es la segunda derivada de f en x .

♡ Si f es k veces diferenciable en $x \in D$, decimos que f es $k + 1$ veces diferenciable en $x \in D$, si $(f^{(k)})'$ existe en x . En este caso $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x)$ es la derivada de orden $k + 1$ de f en x .

Definición 9. Sea $k \in \mathbb{N}$, f es k veces continuamente diferenciable en D si f es k veces diferenciable en D y $f^{(k)}$ es continua en D .

$$C^k(D; \mathbb{R}) = C^k(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable en } D\}$$

$C^k(D)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. De forma similar que $C^{0,\alpha}(D)$.

Definición 10 (Máximo y Mínimo Local:). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

■ f asume un máximo local en $x_0 \in D$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $f(x_0) \geq f(x)$.

□ f asume un mínimo local en $x_0 \in D$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $f(x_0) \leq f(x)$.

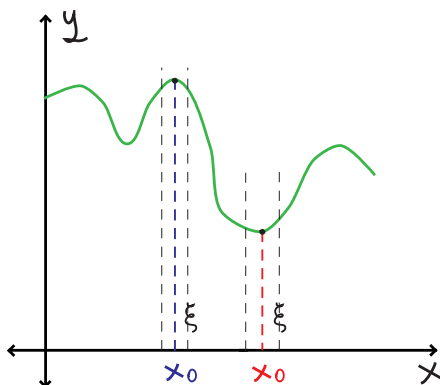


Figura 1.7: Máximo Local y Mínimo Local

Definición 11 (Máximo y Mínimo Global:). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

♣ Si $x \in D$, entonces $f(x) \leq f(x_0)$. x_0 es un máximo global en D .

♡ Si $x \in D$, entonces $f(x) \geq f(x_0)$. x_0 es un mínimo global en D .

Definición 12 (Máximo y Mínimo Estricto:). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

♠ Si $x \in D$, entonces $f(x) < f(x_0)$. x_0 es un máximo estricto en D .

◇ Si $x \in D$, entonces $f(x) > f(x_0)$. x_0 es un mínimo estricto en D .

Teorema 9. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función que asume un máximo(ó mínimo) local en un punto $x_0 \in D$ donde $D = (a, b)$. Si f es diferenciable en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$. El recíproco no se cumple.

Demostración. Como f asume un máximo local en x_0 , entonces si $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $f(x_0) \geq f(x)$. Así pues,

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \begin{cases} > 0 \text{ si } \xi < x_0 \\ < 0 \text{ si } \xi > x_0 \end{cases}$$

Por hipótesis tenemos que

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \text{ donde } \xi \in D - \{x\}$$

Existe y por tanto, la única posibilidad de $f'(x_0)$ es que $f'(x_0) = 0$. ◇

1.2.2. Teorema de Rolle

Teorema 10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$

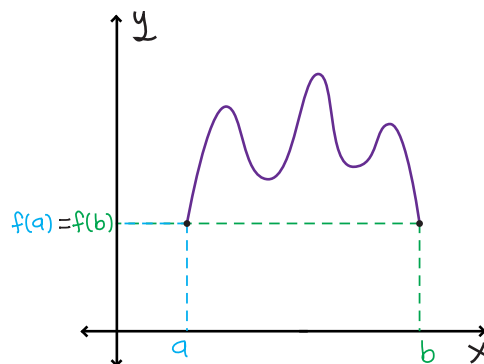


Figura 1.8: Teorema de Rolle

Demostración.

✓ Si f es constante en $[a, b]$ $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$.

✓ Si f no es constante en $[a, b]$ existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) \neq (f(a) = f(b))$.

Sin pérdida de generalidad, $f(x) > (f(a) = f(b))$. Como $[a, b]$ es compacto, por ser f continua, alcanza su máximo en cierto $m \in [a, b]$.

Así pues $f(m) \geq f(x) > (f(a) = f(b))$ lo cual implica $f(m) > (f(a) = f(b))$.

Entonces, $m \in (a, b)$. Afirmamos $m = x_0$, ya que m es un máximo local en (a, b) y además f es diferenciable en (a, b) . Por lo tanto $f'(m) = f'(x_0) = 0$. $\diamond$

1.2.3. Teorema del Valor Medio de Cauchy

Teorema 11. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) . Supongamos que $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demostración. Construimos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$$F(a) = 0 = F(b)$$

Además f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) ya que $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Por tanto el teorema de Rolle tenemos que:

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) = 0$$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$\diamond$

1.2.4. Teorema del Valor Medio

Teorema 12. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

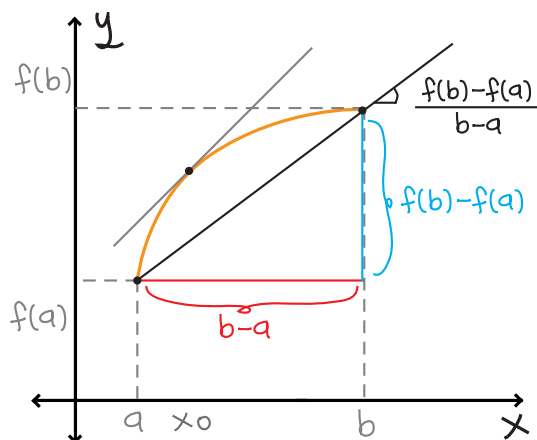


Figura 1.9: Valor Medio

Demostración. Usando el teorema del valor medio de Cauchy con $f(x) = f(x)$ y $g(x) = x$ se tiene entonces que:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_0)}{(x)'} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(x_0) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

◇

Corolario 4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , tal que:

$$u \leq f'(x) \leq m, \quad \forall x \in (a, b)$$

Entonces si $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ se tiene que

$$u \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq m$$

Ósea

$$u(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq m(x_2 - x_1)$$

En particular, si $M = \max\{|u|, |m|\}$ entonces

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Demostración. Por contradicción ($\rightarrow \leftarrow$)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > m \text{ (ó } < u)$$

Aplicamos T.V.M en $[x_1, x_2]$ es decir que existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > m \text{ (ó } < u)$$

Como $x_0 \in [x_1, x_2] \Rightarrow x_0 \in [a, b]$. Así pues existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$f'(x_0) < m \text{ (ó } > u) \text{ (} \rightarrow \leftarrow \text{) DUDA!!!!!!}$$

◇

Corolario 5. Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ entonces f es constante en $[a, b]$.

Corolario 6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en (a, b) $f'(x) = \gamma$ constante, entonces $f(x) = \gamma x + c$.

Demostración. Sea $F(x) = f(x) - \gamma x$

$F'(x) = \gamma - \gamma = 0$ entonces $F(x) = c$ Así pues

$$c = f(x) - \gamma x$$

$$f(x) = \gamma x + c$$

◇

Teorema 13. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $f'(x) = \gamma f(x)$. Entonces $f(x) = f(0)e^{\gamma x}$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= f(x)e^{-\gamma x} \\
 F'(x) &= f(x)(-\gamma e^{-\gamma x}) + e^{-\gamma x} f'(x) \\
 &= -f(x)\gamma e^{-\gamma x} + \gamma e^{-\gamma x} f(x) \\
 &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Así $F(x) = c$. Por lo tanto

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 c &= f(x)e^{-\gamma x} & c &= f(0)e^{-\gamma(0)} \\
 f(x) &= ce^{\gamma x} & &= f(0)1 \\
 & & &= f(0)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) = f(0)e^{\gamma x}$

◇

Teorema 14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq \gamma|f(x)|$, donde $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Si $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$, entonces $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Teorema 15. Sean $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función **Lipschitz-continua**, $c \in \mathbb{R}$ constante y $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Existe, a lo sumo, una solución $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación diferencial

$$f'(x) = \phi(f(x)), \quad \forall x \in [a, b]$$

tal que $f(a) = c$.

Demostración. Supongamos que existe dos soluciones de la ecuación con $f_1(a) = f_2(a) = c$. Usamos la función auxiliar

$$F(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
 |f'(x)| &= |f'_1(x) - f'_2(x)| \\
 &= |\phi(f_1(x)) - \phi(f_2(x))| \\
 &\leq L|f_1(x) - f_2(x)| \\
 &\leq L|F(x)| \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Notamos que $F(a) = f_1(a) - f_2(a) = c - c = 0$. Por lo tanto $F(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ y remplazándolo en $\clubsuit$ entonces

$$|F'(x)| \leq 0 \Rightarrow F'(x) = 0$$

◇

1.2.5. Máximos y Mínimos

Teorema 16.

► Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f'(x) \geq 0$ en (a, b) entonces f es monótona creciente en (a, b) .

◄ Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f'(x) \leq 0$ en (a, b) entonces f es monótona decreciente en (a, b) .

Teorema 17.

▲ Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en su dominio y $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces x_0 es un máximo local en (a, b) .

▼ Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en su dominio y $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces x_0 es un mínimo local en (a, b) .

Recíprocamente, si f asume un máximo local en $x_0 \in [a, b]$ y f es dos veces diferenciable en x_0 entonces $f''(x_0) \leq 0$. (Es similar con el mínimo)

1.2.6. Expansión de Taylor

Teorema 18. Suponga que $f : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $f : [x, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ dependiendo si $x_0 < x$ ó $x_0 > x$). Tiene derivada continua en $[x_0, x]$ y es diferenciable $n + 1$ veces en (x_0, x) . Entonces, existe un $\xi \in (x_0, x)$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Demostración. ME FALTA!!!!

◇

1.2.7. Teorema del Punto Fijo de Banach en $\mathbb{R}$

Teorema 19. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(I) \subset I$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad \forall x, y \in I$$

Entonces, f tiene un único punto fijo ξ en I . Ósea, existe un único $\xi \in I$, tal que $f(\xi) = \xi$

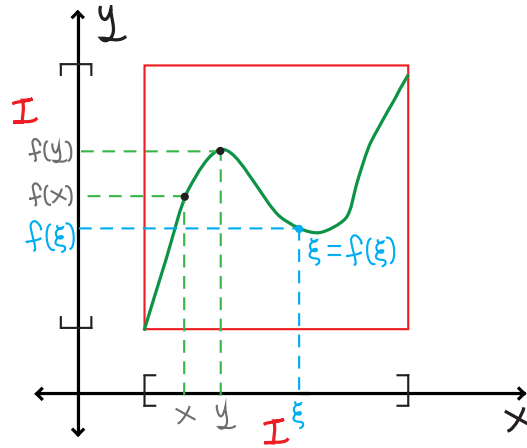


Figura 1.10: Punto Fijo

Demostración. Sea $x_0 \in I$ cualquiera, construimos una sucesión

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \quad \begin{cases} x_0 \\ x_1 = f(x_0) \\ x_2 = f(x_1) \\ x_3 = f(x_2) \\ \vdots \end{cases}$$

Esto es posible porque $f(I) \subset I$ tomemos $n > m \geq 1$ y miremos

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \dots - x_{m+1} + x_{m+1} - x_m| \\ &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m| \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
 |x_k - x_{k-1}| &= |f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})| \\
 &\leq \theta |x_{k-1} - x_{k-2}| \\
 &= \theta |f(x_{k-2}) - f(x_{k-3})| \\
 &\leq \theta^2 |x_{k-2} - x_{k-3}| \\
 &\vdots \\
 &\leq \theta^{k-1} |x_1 - x_0|
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_m| &\leq \sum_{k=m}^n \theta^{k-1} |x_1 - x_0| \\
 &= \sum_{k=m}^{n-1} \theta^k |x_1 - x_0| \\
 &= |x_1 - x_0| \theta^m \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k \\
 &\leq |x_1 - x_0| \theta^m \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \\
 &\leq |x_1 - x_0| \theta^m \frac{1}{1 - \theta}
 \end{aligned}$$

¿Qué sucede cuando $m \rightarrow \infty$? A medida que m, n tienden a infinito los términos x_n, x_m son cada vez más cercanos.

$\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ es de ***Cauchy***

$\implies \langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cierto $\xi \in I$ es cerrado, contiene el límite.

Ahora

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad f \text{ es continua} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\
&= \xi \text{ es un punto fijo de } f \\
f(\xi) &= \xi
\end{aligned}$$

Sean ξ_1, ξ_2 tales que $f(\xi_1) = \xi_1$ y $f(\xi_2) = \xi_2$ entonces

$$|\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq \theta |\xi_1 - \xi_2|$$

Como $\theta < 1$, $|\xi_1 - \xi_2| = 0$, ósea,

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \xi \text{ ¡es único!}$$

◇

Corolario 7. Si I es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(I) = I$ y $|f'(x)| \leq \theta$ con $0 \leq \theta \leq 1 \quad \forall x \in I$, entonces f tiene un único punto fijo $\xi \in I$ $f(\xi) = \xi$.

Demostración. Por corolario del T.V.M:

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad \forall x, y \in I$$

Es decir, f es una contracción. Por el teorema del punto fijo de Banach f tiene un único punto fijo $\xi \in I$.

◇

CAPÍTULO 2

Funciones en varias variables

2.1. Nociones de partida

2.1.1. Norma

Definición 13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

es una norma si:

$$\text{i) } \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V \text{ y } \|x\| = 0 \text{ si y solo si } x = 0 \quad (\text{No Negatividad})$$

$$\text{ii) } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Salto del Escalar})$$

$$\text{iii) } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Desigualdad Triangular})$$

Una pareja $(V, \| \cdot \|)$ donde V es un espacio vectorial real, y $\| \cdot \|$ es una norma en V se llama un espacio vectorial normado.

2.1.2. Bolas

Definición 14. $\{v \in V / \|v - a\| < \varepsilon, a \in V \text{ fijo, } \varepsilon > 0\}$ Es una bola abierta de radio ε centrada en a .

Un $U \in V$ es abierto si $\forall u \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $u \in B_\varepsilon(u) \subset U$.

Un $A \in V$ es cerrada si $A^c = V \setminus A$ es abierto.

Definición 15. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$. Decimos que x_n converge a $x \in V$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

2.1.3. Continuidad

Definición 16. Sea f una función $f : V \supset U \rightarrow V, v \in U$, decimos

$$\lim_{v \rightarrow v_0} f(v) = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|f(v) - L\| < \varepsilon \iff \|v - v_0\| < \delta$$

f es continua en v_0 si

- ✓ $\lim_{v \rightarrow v_0} f(v)$ EXISTE.
- ✓ $f(v_0)$ está DEFINIDA.
- ✓ $\lim_{v \rightarrow v_0} f(v) = f(v_0)$ y son IGUALES.

2.1.4. Sucesión de Cauchy

Definición 17. Una sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon$$

2.1.5. Completitud

Definición 18. Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ es completo ó de Banach si toda sucesión de Cauchy en V converge. (v_n converge $\iff v_n$ es de Cauchy).

2.2. Teorema del punto fijo de Banach

Teorema 20. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. $f : V \supset B \rightarrow V$ una función en B tal que $f(B) \subset B$ (función estable). Si f es una contracción, es decir

$$\|f(u) - f(w)\| \leq \theta \|u - w\|, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad \forall u, w \in B$$

con B cerrado, entonces f tiene un único punto fijo $\xi \in B$. Es decir un único $\xi \in V$ tal que $f(\xi) = \xi$.

2.3. El espacio $C_b^0(K)$

Sea $K \subset \mathbb{R}$, consideremos $C^0(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } K\}$. Podemos suponer que $K = [a, b]$ (compacto).

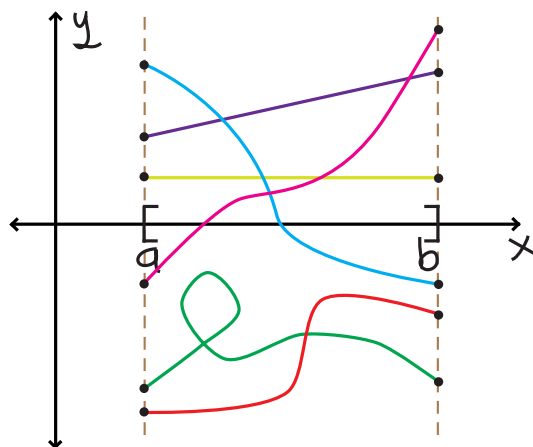


Figura 2.1: Funciones Continuas en $[a, b]$

Ya hemos visto que $C^0(K)$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalar de funciones.

Ahora nos preguntamos ¿Este espacio admite una norma que lo haga un espacio de Banach?.

SI, para ello, nos ayudamos de las sucesiones.

Definición 19. Sea $K \subset \mathbb{R}$ y $(f_n : K \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones. Decimos que f_n converge puntualmente a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ si para cada $x \in K$ fijo,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \text{ si } n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(N depende de ε y x ; $N_{(\varepsilon, x)}$).

Ejemplo 1. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

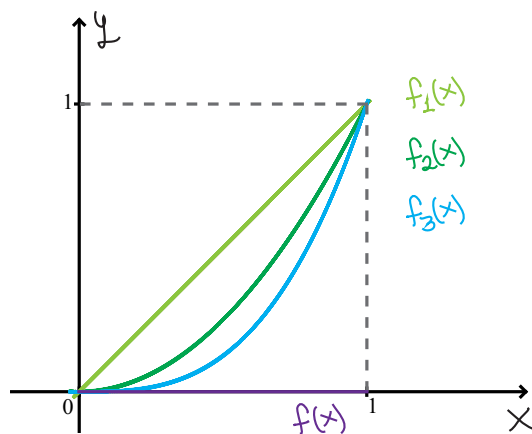


Figura 2.2: $f_n(x) = x^n$ donde $n \in \mathbb{N}$

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

♣ Si $x = 1$, $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \dots = f_2(x) = 1$ por lo tanto $f(x) = 1$.

♠ Si $0 \leq x < 1$, tomemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera, queremos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

entonces

$$|x^n| = |x|^n = x^n < \varepsilon \text{ ya que } x \geq 0$$

ahora

$$\log x^n < \log \varepsilon$$

$$n \log x < \log \varepsilon$$

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

ya que $\log x < 0$ si $0 < x < 1$. N es igual al primer entero mayor o igual a $\frac{\log \varepsilon}{\log x}$, podemos observar que $N(\varepsilon, x)$

Definición 20. Sea $K \subset \mathbb{R}$ y $(f_n : K \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones. Decimos que f_n es convergente uniformemente a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon < 0, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \forall n \geq N, x \in K \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $N = N(\varepsilon)$ es decir, N depende solamente de ε .

2.4. Teorema del Limite Uniforme

Teorema 21. Sea $K \subset \mathbb{R}$ y $(f_n : K \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ entonces f es continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ por convergencia uniforme $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \xi \in K$$

En particular si $n = N$

$$|f_N(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \xi \in K$$

Ya que las f_n son continuas $\exists \delta > 0$ tal que si

$$|y - x| < \delta : |f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto f es continua en K .

◇

2.5. Norma del Supremo

Definición 21. $K \subset \mathbb{R}$, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Proposición 6. $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio vectorial de funciones acotadas $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración.

1. $\|f\|_K < \infty$ porque f es acotada $\|f\|_K \geq 0$ porque es el *sup* de un conjunto de valores no negativos

$$\begin{aligned}\|f\|_0 = 0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \in K\} = 0 \\ &\Rightarrow |f(x)| = 0, \quad \forall x \in K \\ &\Rightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in K\end{aligned}$$

2. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \sup\{|\lambda f(x)| : x \in K\} \\ &= |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in K\} \\ &= |\lambda| \|f\|_K\end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned}\|f + g\|_K &= \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in K\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in K\} + \sup\{|g(x)| : x \in K\} \\ &= \|f\|_K + \|g\|_K\end{aligned}$$

◇

Teorema 22. Una sucesión $(f_n : K \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_K = 0$$

Demostración.

$$\begin{aligned}f_n \rightrightarrows f &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in K\} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \|f_n - f\|_K < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_K = 0\end{aligned}$$

◇

Teorema 23. Sea $C_b^0(k) = \{f \in C^0(K) : \|f\|_K < \infty\}$, $(C_b^0(k), \|\cdot\|_K)$ es un espacio de **Banach**.

Demostración. Ya vimos $(C_b^0(K), \|\cdot\|_K)$ es un espacio vectorial normado. Hace falta ver que sea completo.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de **Cauchy** en este espacio, es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq N \text{ entonces } \|f_n - f_m\|_K < \varepsilon$$

$$\|f_n - f_m\|_K < \varepsilon \text{ esto es igual a } \sup\{|f_n - f_m| : x \in K\} < \varepsilon$$

Para cada $x \in K$, si $n, m \geq N$ entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ ó sea $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy** en $\mathbb{R}$

Como $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo $f_n(x) \rightarrow y$ con $x \in K$, ahora definimos $f(x) = y_x$, en cada $x \in K$

Tomemos ahora $m \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq N : \sup\{|f_n - f_m| : x \in K\} < \varepsilon$$

Esto significa que f_n converge uniformemente a f . ◇

$C_b^0(k)$ es de **Banach** ¿Hay espacio de **Banach** de funciones diferenciables?
Si, si usamos funciones continuas diferenciable.

Teorema 24. $D \subseteq \mathbb{R}$, $(f_n : D \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas diferenciables en D . Si (f_n) existe y es continua en D)

1. Existe $x \in D$ tal que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2. $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en D .

entonces $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f continuamente diferenciable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x), \quad \forall x \in D$$

Definición 22. Sea $f \in C'(D)$ (f es continuamente diferenciable en D), $D \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} \|f\|_{C'(D)} &= \|f\|_D + \|f'\|_D \\ &= \sup\{|f(x)| : x \in D\} + \sup\{|f'(x)| : x \in D\} \end{aligned}$$

También $C'_b(D) = \{f \in C'(D) : \|f\|_{C'(D)} < \infty\}$

Lema 3. $\|\cdot\|_{C'(D)}$ es una norma en $C'_b(D)$

Teorema 25. $(C'_b(D), \|\cdot\|_{C'(D)})$ es un espacio de **Banach**.

Demostración. Es espacio vectorial $(C'(D), +, \cdot)$ satisface los axiomas de esta estructura normado (tiene norma $\|\cdot\|_{C'(D)}$).

Resta verificar la completitud.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C'_b(D)$ una sucesión de **Cauchy**

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq N \text{ entonces } \|f_n - f_m\|_{C'(D)} < \varepsilon \\ \text{si y solo si } \|f_n - f_m\|_D + \|f'_n - f'_m\|_D < \varepsilon \\ \text{entonces } \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon \text{ y } \|f'_n - f'_m\|_D < \varepsilon \end{aligned}$$

Esto es la sucesión de las funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ originales y la sucesión de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son de **Cauchy**. Ósea convergen:

$$f_n \rightrightarrows f, \quad f'_n \rightrightarrows f'.$$

Esto significa que $f \in C'_b(D)$ es decir $C'_b(D)$ es completo. $\diamond$

$C'_b(D)$ es de **Banach** ¿Hay espacio de **Banach** de funciones que tengan derivadas de orden superior?

Si, por inducción.

Definición 23. Sea $f \in C^k(D)$ (f es continuamente diferenciable en D con derivada hasta orden k), $D \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^k(D)} &= \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_D \\ &= \|f\|_D + \|f^{(1)}\|_D + \|f^{(2)}\|_D + \dots + \|f^{(k)}\|_D \end{aligned}$$

También $C^k_b(D) = \{f \in C^k(D) : \|f\|_{C^k(D)} < \infty\}$

Lema 4. $\|\cdot\|_{C^k(D)}$ es una norma en $C_b^k(D)$

Teorema 26. $(C_b^k(D), \|\cdot\|_{C^k(D)})$ es un espacio de **Banach**.

Teorema de **Bolzano-Weierstrass**. Dice si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, donde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada esto es $m \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

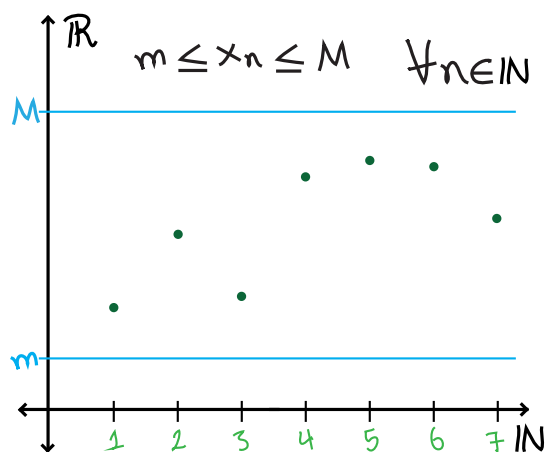


Figura 2.3: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada

Ejemplo 2.

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

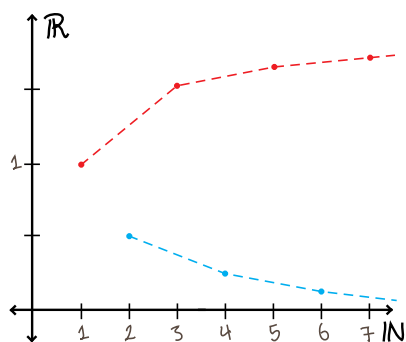


Figura 2.4: Subsucesiones $x_n = x_{\text{impar}}$ y x_{par}

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ no existe, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ NO es convergente pero SI es acotada porque $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < x_n < 2$ y notamos que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} &= 2\end{aligned}$$

Una sucesión acotada significa que $m \leq ||x_n|| \leq n$.

Teorema de Arzela-Ascoli. Una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $C_b^0(I)$ donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. Es uniformemente acotada y equicontinua entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

2.6. El Teorema de Arzela-Ascoli

Definición 24. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en I .

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es **uniformemente acotada** en I si y solo si

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, x \in I \quad |f_n(x)| \leq M$$

2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es **equicontinua** en I si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x, y \in I \text{ tal que } |x - y| < \delta \text{ entonces } |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Teorema 27. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ (compacto), $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en I que es uniformemente acotada y equicontinua en I entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Demostración. Sin pérdida de generalidad $I = [0, 1]$

Paso 1. Podemos encontrar un subconjunto contable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sucesión en I tal que cualquier $x \in I$ se puede aproximar con elementos de x_n).

Por ejemplo, tal conjunto puede ser

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$$

Al final la $\star$ va a cubrir "casi todo" I , sin embargo para cualquier $x \in I$, existe una sucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x . Esto se resume diciendo que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es **densa** en I .

- Paso 2. ► Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en I , para $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números acotada de números reales. Por **B-W**, tiene una subsucesión convergente $(f_{1,n}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ considerémosla como $(f_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$.
- Como $(f_{1,n}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales, tiene una subsucesión convergente $(f_{2,n}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ considerémosla como $(f_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$.
- El mismo tratamiento a $(f_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ y así sucesivamente :

Este proceso conduce a:

$$\begin{array}{ll}
 f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \dots & \text{es tal que } (f_{1,n}(x_1))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\
 f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \dots & \text{es tal que } (f_{2,n}(x_2))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 f_{k,1} & f_{k,2} & f_{k,3} & \dots & \text{es tal que } (f_{k,n}(x_k))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
 \end{array}$$

Tomemos la subsucesión de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por $(f_{k,k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Notemos que $(f_{k,k}(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para cada $x_i \in (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, porque cada sucesión es una subsucesión de la anterior y, así, no pierde la propiedad de convergencia en x_i (proceso de diagonalización de **Cantor**).

Paso 3. $(f_{k,k}(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy**.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera,

◄ Ya que $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua, $(f_{k,k}(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ también es equicontinua. Es decir, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in I, \forall k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x - y| < \delta \text{ entonces } |f_{kk}(x) - f_{kk}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

◄ Dado que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es densa en I y es acotada, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in I$, $\exists i \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ tal que $|x - x_i| < \delta$.

◄ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ $n, m \geq N$, se tiene

$$|f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ya que $(f_{k,k}(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ para $x_i \in (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fijo es convergente y así de **Cauchy**.

Ahora bien, $\forall x \in I, n, m > N, i \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ se tiene

$$\begin{aligned} |f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| &\leq |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i) + f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i) + f_{mm}(x_i) - f_{mm}(x)| \\ &\leq |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i)| + |f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i)| + |f_{mm}(x_i) - f_{mm}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Así, $\forall x \in I, (f_{k,k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge. ✓

Por tanto, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$ se tiene

$$\sup\{|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| : x \in I\} < \varepsilon$$

Ósea $\|f_{nn} - f_{mm}\|_I < \varepsilon$, esto es, $(f_{k,k})_{k \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy** por las propiedades del espacio de funciones

$$(f_{k,k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Converge.}$$

◇

2.7. La Integral de Reimann

Justificación:

Lema 5. Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $D \subset I$ contable. Si g es diferenciable en $I \setminus D$ y $g'(m) \leq M, \forall x \in I \setminus D$, entonces

$$g(b) - g(a) \leq M(b - a)$$

Definición 25. Sea I un intervalo en $\mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en I si g es continua y existe un subconjunto contable $D \subset I$ tal que g es diferenciable en $I \setminus D$ con $g'(\xi) = f(\xi), \forall \xi \in I \setminus D$, en este caso, se mira que f es integrable en el sentido de Riemann en I .

Y con el lema anterior implica

Lema 6. si g_1, g_2 son primitivas de f en I , $g_1 - g_2$ es una función constante.

Demostración. Sea $G = g_1 - g_2$ entonces

$$G'(x) = g_1' - g_2' = f(x) - f(x) = 0 = M, \forall x \in I \setminus D, D \subset I$$

por el lema anterior tenemos

$$G(b) - G(a) \leq 0$$

si hacemos lo mismo con $-G = g_2 - g_1$,

$$-G(b) + G(a) = G(a) - G(b) \leq 0$$

$$G(b) - G(a) = 0 \Leftrightarrow G(b) = G(a) = c$$

Por tanto G es constante

$$G(x) = g_1(x) - g_2(x) = C$$

◇

Definición 26. Una función $t : I \rightarrow \mathbb{R}$ es escalonada si I es la unión disyunta de un numero finito de subintervalos y en cada uno de ellos t es constante.

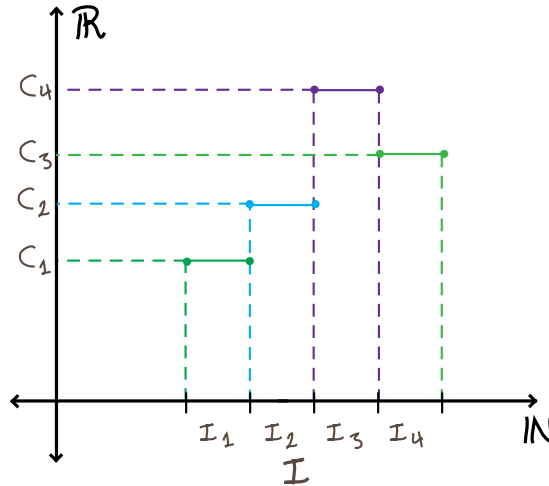
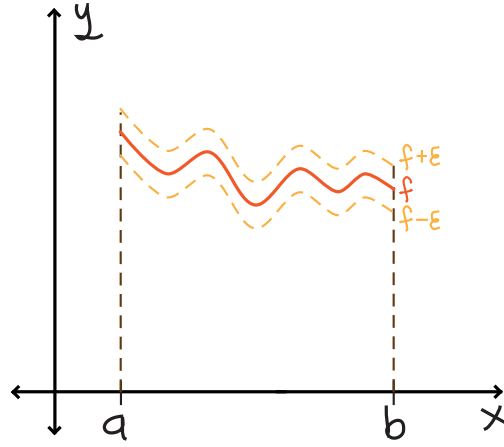


Figura 2.5: Funcion Escalonada

f es una función admisible en I si es el límite uniforme de funciones escalonadas en I , ósea, f es admisible si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas en I tal que

$$f_n \Rightarrow f$$

es decir $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ $\|f_n - f\|_I < \varepsilon$

Figura 2.6: $\|f_n - f\|_I < \varepsilon$

Lema 7. Sea I cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces f es admisible.

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ continuidad entonces

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } |x - y| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f es uniformemente continua

Sea m el numero natural más grande tal que $a + m\delta < b$ para $\mu \in \mathbb{Z}$, $0 \leq M \leq m$

$$x_m = a + \mu\delta, \quad x_{m+1} = b$$

ahora definimos una sucesión de funciones escalonadas $t_n : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t_n = \begin{cases} t(x_\mu) & x_\mu \leq x < x_{\mu+1} \\ t(b) & x = b \end{cases}$$

finalmente

$$|t_n(x) - t(x)| = |f(x, \mu) - f(x)| < \varepsilon$$

y por tanto el supremo también así $t_n \rightrightarrows t$

◇

Teorema 28. Sea el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admisible, entonces f tiene una primitiva.

Corolario 8. *Si f es continua, f tiene primitiva.*

Teorema 29. *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua con primitiva g , entonces $g'(x) = f(x) \forall x \in I$*

Demostración. Sea la función $\phi : [-h, h] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(\eta) = g(x + \eta) - f(x)\eta$$

es diferenciable en casi todo $[-h, h]$, aplicando el lema

$$\begin{aligned} |\phi(h) - \phi(0)| &= |g(x + h) - f(x)h - g(x)| \\ &= |g(x + h) - g(x) - f(x)h| \\ &\leq h \sup\{|g'(x + \eta) - f(x)|/0 \leq \eta \leq h\} \end{aligned}$$

ahora tomando $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sup\{|f(x + \eta) - f(x)|/0 \leq \eta \leq h\})$$

f es continua. ◇

Definición 27. Sea g una primitiva de f en un intervalo I , $x_1, x_2 \in I$. La integral de f en x_1 a x_2 es

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = g(x_2) - g(x_1) = g(x)|_{x_1}^{x_2}$$

por abuso del lenguaje, seguimos escribiendo $g' = f$ a pesar de que esto cumple en casi todo I .

Lema 8. *Sea I cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ admisible entonces $f\phi$ es admisible.*

2.7.1. Propiedades de la Integral de Riemann

Integración por Sustitución

Teorema 30. *Sean I, J intervalos cerrados, h una primitiva de una función admisible en I y $h(I) \subset J$. Sea $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces $\forall x_1, x_2 \in I$*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi = \int_{h(x_1)}^{h(x_2)} f(y)dy$$

Demostración. Por definición tenemos que

$$\int_{h(x_1)}^{h(x_2)} f(y)dy = g(h(x_2)) - g(h(x_1))$$

donde g es una primitiva de f

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi$$

$f(h(\xi))$ es continua, $h'(\xi)$ es admisible y $f(h(\xi))h'(\xi)$ es admisible por lo tanto tiene primitiva

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi = g(h(x)) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

◇

Integración por Partes

Teorema 31. Sean f, g primitivas de funciones admisibles definidas en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$ si $x_1, x_2 \in I$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx$$

Demostración. La derivada del producto está dada por

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

entonces fg es una primitiva de $f'g + fg'$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

◇

Monotonicidad de la Integral

Lema 9. Sean $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones admisibles con primitivas g_1, g_2 respectivamente si $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que $f_1(x) \leq f_2(x)$ o sea $g'_1(x) \leq g'_2(x)$

$$g'_1(x) - g'_2(x) \leq 0$$

$$(g_1(x) - g_2(x))' \leq 0$$

por Lema en el intervalo $[a, b]$

$$(g_1 - g_2)(b) - (g_1 - g_2)(a) \leq (b - a)0$$

$$g_1(b) - g_2(b) - g_1(a) + g_2(a) \leq 0$$

$$g_1(b) - g_1(a) \leq g_2(b) - g_2(a)$$

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$$

◇

Teorema del Valor Medio para Integrar

Teorema 32. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Estimación Estándar

Teorema 33. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admisible. Entonces

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

Teorema 34. Sea I cerrado y acotado, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones admisibles tales que $f_n \Rightarrow f$ en I . Entonces, f es admisible y $\forall x_1, x_2 \in I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

2.8. E. Diferencial Ordinaria de Primer Orden

Encontrar una función f tal que

$$\boxtimes \quad \frac{dy}{dx} = \phi(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Ejemplo 3.

$$y' = y$$

$$y' = x \sin y$$

$$y' = y^2 + yx$$

Entonces hay que buscar condiciones para que ($\boxtimes$) tenga solución única.

2.8.1. Teorema de Picard-Lindeläf

Teorema 35. Supongamos $\phi : P \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua con

$$P = \{(x, y) / |x - x_0| \leq \rho \wedge |y - y_0| \leq \eta\}$$

y con $|\phi(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in P$ supongamos también que ϕ es **Lipshitz** en y , ósea, existe $L < \infty$ tal que

$$|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para todo $x : |x - x_0| \leq \rho$ y $y_1, y_2 : |y_1 - y_0|, |y_2 - y_0| \leq \eta$ entonces, existe $h > 0$ tal que la ecuación diferencial

$$f'(x) = \phi(x, f(x))$$

con la condición $f(x_0) = y_0$, tiene una solución única en el intervalo

$$I = \{y : |y - y_0| \leq \eta\} \cap \{x : |x - x_0| \leq \rho\}$$

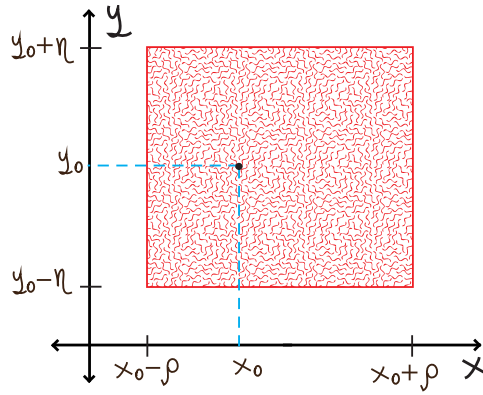
Demostración.

Paso 1. Resolver

$$f'(x) = \phi(x, f(x)); \quad f(x_0) = y_0$$

integrando esto equivale a

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \phi(\xi, f(\xi)) d\xi$$

Figura 2.7: La Región P

Paso 2. Teorema del punto fijo de **Babach**

a) Espacio de Banach

$$V = (C_b^0(I), \|\cdot\|_{C_b^0(I)})$$

b) Subconjunto cerrado

$$A = \{f \in C_b^0(I) / \|f - y_0\|_{C_b^0(I)} \leq \eta\}$$

c) Aplicacion

$$H : A \rightarrow V$$

$$f(x) \rightarrow H(f(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x \phi(\xi, f(\xi)) d\xi$$

d) Estabilidad de $H : A \rightarrow V$

Sea $f \in A$, o sea, $\|f - y_0\|_{C_b^0(I)} \leq \eta$ considerar

$$\begin{aligned} \|H(f) - y_0\|_{C_b^0(I)} &= \|y_0 + \int_{x_0}^x \phi(\xi, f(\xi)) d\xi - y_0\|_{C_b^0(I)} \\ &= \sup\{|\int_{x_0}^x \phi(\xi, f(\xi)) d\xi| : x \in I\} \\ &\leq h \sup\{|\phi(\xi, f(\xi))| : x \in I\} \\ &= hM \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

Escojamos $hM \leq \eta$

e) H es una contracción si $f, g \in A$ es decir $\|f - y_0\|_{C_b^0(I)} \leq \eta$, $\|g - y_0\|_{C_b^0(I)} \leq \eta$ debemos considerar

$$\begin{aligned} \|H(f) - H(g)\|_{C_b^0(I)} &= \|y_0 + \int_{x_0}^x \phi(\xi, f(\xi))d\xi - y_0 - \int_{x_0}^x \phi(\xi, g(\xi))d\xi\|_{C_b^0(I)} \\ &= \left\| \int_{x_0}^x (\phi(\xi, f(\xi)) - \phi(\xi, g(\xi)))d\xi \right\|_{C_b^0(I)} \\ &= \sup\left\{ \left| \int_{x_0}^x (\phi(\xi, f(\xi)) - \phi(\xi, g(\xi)))d\xi \right| : x \in I \right\} \\ &\leq h \sup\{|\phi(\xi, f(\xi)) - \phi(\xi, g(\xi))| : x \in I\} \\ &\leq hL \sup\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in I\} \\ &\leq hL\|f - g\|_{C_b^0(I)} \end{aligned}$$

$0 \leq hL < 1$ entonces $0 \leq h < \frac{1}{L}$ con esta condición h es una contracción $h < \min(\frac{1}{L}, \frac{\eta}{M})$ y por tanto también H es continua.

Paso 3. Conclusión: H posee un único punto fijo $f(x)$, o sea, existe $f(x) \in A$ tal que

$$H(f(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x \phi(\xi, f(\xi))d\xi \quad \clubsuit$$

f es continua no problema porque si derivamos a ($\clubsuit$) el **T.F.C**

$$f'(x) = \phi(x, f(x))$$

además $f(x_0) = y_0$.

◇

2.9. Ejercicios en Clases

Ejer 1. Estudiar la convergencia de:

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + nx^2}$$

Solución 1. Para estudiar la convergencia de funciones primero miraremos que tipo de función es, dejando a n fijo y así poderla graficar:

Asíntotas Verticales Se dice que una función $g(x)$ tiene asíntota vertical cuando esta función no está definida en un $x = a$.

$$\begin{aligned}
 1 + nx^2 &= 0 \\
 nx^2 &= -1 \\
 x^2 &= -\frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Como lo anterior no tiene solución real entonces podemos decir que no existen asíntotas verticales.

Asíntotas Horizontales Se dice que una función $g(x)$ tiene asíntota horizontal cuando $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 x}{1 + nx^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{x}}{\frac{1}{x^2} + n} = 0$$

Existe una asíntota vertical en $y = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Par ó Impar Se dice que una función es par o impar si y solo si $g(-x) = g(x)$ o $g(-x) = -g(x)$ respectivamente.

$$f_n(-x) = \frac{n^2(-x)}{1 + n(-x)^2} = \frac{-n^2 x}{1 + nx^2} = -\frac{n^2 x}{1 + nx^2} = -f_n(x)$$

Por lo tanto $f_n(x)$ es impar.

Puntos Críticos Por medio del Calculo podemos obtener los puntos críticos haciendo $g'(x) = 0$ y resolviendo a x .

$$\begin{aligned}
 f'_n(x) &= \frac{n^2(1 + nx^2) - n^2 x(2nx)}{(1 + nx^2)^2} \\
 &= \frac{n^2 + n^3 x^2 - 2n^3 x^2}{(1 + nx^2)^2} \\
 &= \frac{n^2 - n^3 x^2}{(1 + nx^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_n(x) &= 0 \\
 \frac{n^2 - n^3 x^2}{(1 + nx^2)^2} &= 0 \\
 n^2 - n^3 x^2 &= 0 \\
 n^2(1 - nx^2) &= 0 \\
 1 - nx^2 &= 0 \\
 x^2 &= \frac{1}{n} \\
 x &= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ son puntos críticos.

Máximos y Mínimos Mirando el crecimiento y decrecimiento de las tangentes.

$$\begin{aligned} f'_n(x) &< 0 \\ n^2 - n^3 x^2 &< 0 \\ 1 - nx^2 &< 0 \\ x^2 &> \frac{1}{n} \\ x &> -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &> 0 \\ n^2 - n^3 x^2 &> 0 \\ 1 - nx^2 &> 0 \\ x^2 &< \frac{1}{n} \\ x &< \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ es un mínimo y $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ es un máximo.

Imagen de 0 y de los puntos críticos

$$\begin{aligned} f_n(0) &= \frac{n^2(0)}{1 + n(0)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_n\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{n^2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + n\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \pm \frac{n^{3/2}}{1 + n\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \pm \frac{n^{3/2}}{2} \end{aligned}$$

Ahora bien con toda la información anterior podemos graficar f_n con n fijo

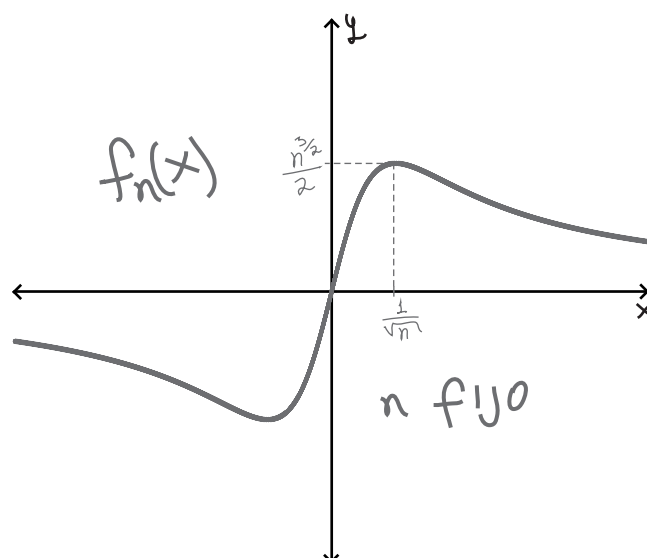
Si $m > n$, como es la grafica f_m en comparación con la grafica de f_n . ¿?

Utilizando 2.8 y la condición $m > n$ obtenemos 2.9

Convergencia Puntual

Fijemos $x_0 > 0$ cualquiera, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x_0}{1 + n x_0^2} = \infty$$

Figura 2.8: $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2 x^2}$

Similar para $x_0 < 0$, esto es igual a $-x_0 > 0$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(-x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-x_0)}{1 + n^2(-x_0)^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x_0}{1 + n^2 x_0^2} = -\infty$$

Por tanto la convergencia puntual esta dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x_0 < 0 \\ 0 & \text{si } x_0 = 0 \\ \infty & \text{si } x_0 > 0 \end{cases}$$

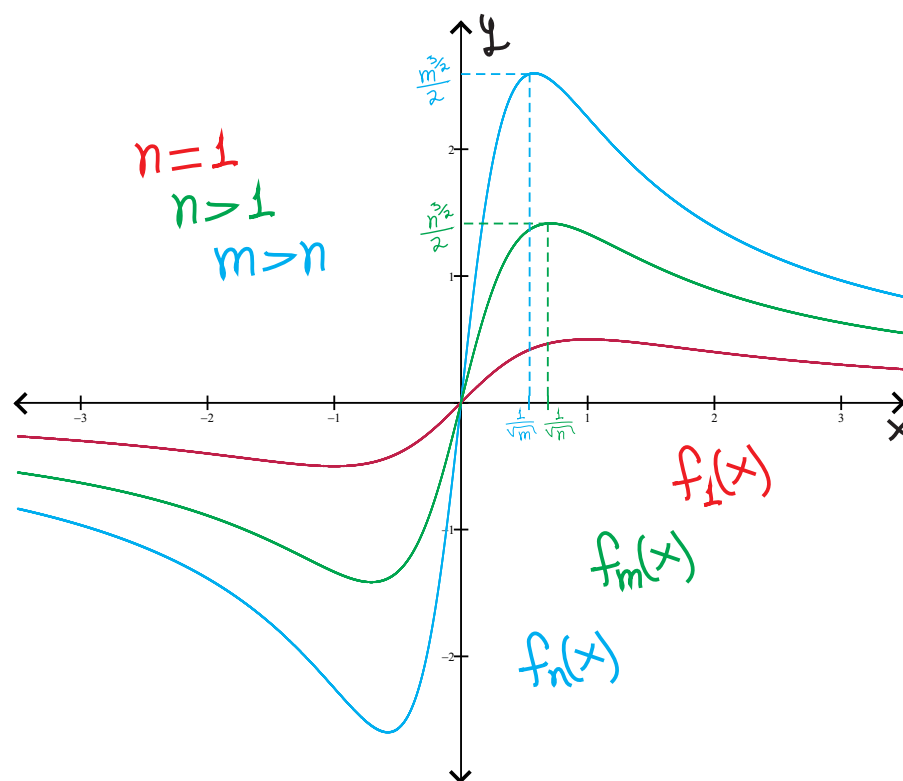
Convergencia Uniforme

En este caso no se puede hablar de convergencia uniforme ya que no existe convergencia puntual.

Ejer 2. Estudiar la convergencia de:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

Solución 2. Para estudiar la convergencia de funciones primero miraremos que tipo de función es, dejando a n fijo y así poderla graficar:

Figura 2.9: Comparación entre f_n y f_m

Asíntotas Verticales Se dice que una función $g(x)$ tiene asíntota vertical cuando esta función no está definida en un $x = a$.

$$1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 = -1$$

Como lo anterior no tiene solución real entonces podemos decir que no existen asíntotas verticales.

Asíntotas Horizontales Se dice que una función $g(x)$ tiene asíntota horizontal cuando $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + x^2} = 0$$

Existe una asíntota vertical en $y = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Par ó Impar Se dice que una función es par o impar si y solo si $g(-x) = g(x)$ o $g(-x) = -g(x)$ respectivamente.

$$f_n(-x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-x}{n}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} = f_n(x)$$

Por lo tanto $f_n(x)$ es par.

Puntos Críticos Por medio del Calculo podemos obtener los puntos críticos haciendo $g'(x) = 0$ y resolviendo a x .

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{-2x/n^2}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} \\ &= \frac{-2}{n^2} \cdot \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'_n(x) &= 0 \\ \frac{-2}{n^2} \cdot \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} &= 0 \\ \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ es un punto crítico.

Máximos y Mínimos Mirando el crecimiento y decrecimiento de las tangentes.

$$\begin{aligned} f'_n(x) &< 0 \\ \frac{-2}{n^2} \cdot \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} &< 0 \\ \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'_n(x) &> 0 \\ \frac{-2}{n^2} \cdot \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} &> 0 \\ \frac{x}{\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2} &< 0 \\ x &< 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ es un máximo.

Imagen del punto crítico

$$\begin{aligned} f_n(0) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{0}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

Ahora bien con toda la información anterior podemos graficar f_n con n fijo

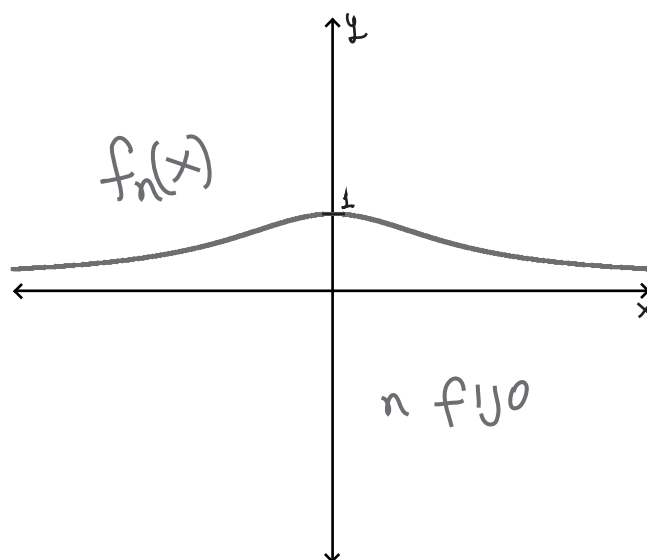


Figura 2.10: $f_n(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}$

Si $m > n$, como es la grafica f_m en comparación con la grafica de f_n . ¿? Utilizando 2.10 y la condición $m > n$ obtenemos 2.11.

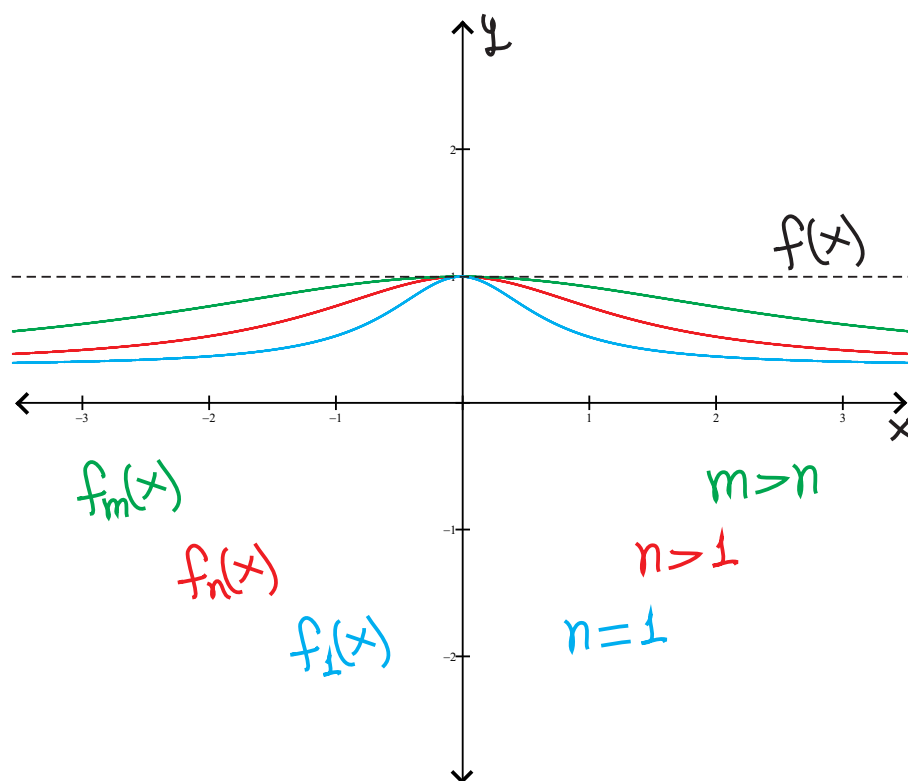
Convergencia Puntual

Fijemos $x_0 > 0$ cualquiera, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x_0}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + (x_0)^2} = 1$$

Similar para $x_0 < 0$, esto es igual a $-x_0 > 0$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(-x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{-x_0}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + (x_0)^2} = 1$$

Figura 2.11: Comparación entre f_n y f_m

Por tanto la convergencia puntual esta dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 1$$

Convergencia Uniforme

Ahora bien será que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f_n \Rightarrow f = 1$. ¿?

Para todo $\mathbb{R}$ NO se cumple la convergencia uniforme, pero si tomamos un intervalo $[-a, a]$ con $0 < a < \infty$ como dominio, si se cumple que $f_n \Rightarrow f = 1$.

Restringimos la función f_n

$$f_n : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 0 < a < \infty$$

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

Probamos que $f_n \Rightarrow f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{[-a, a]} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [-a, a]\} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall x \in [-a, a] \text{ entonces } |f_n(x) - f| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, sabemos que para $x_0 \in [-a, a]$ tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 1$.
O sea

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{x_0} \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N_{x_0} \text{ entonces } |f_n(x) - f| < \varepsilon$$

entre todos los $(N_{x_0})_{x_0 \in [-a, a]}$, tomemos $N = N_a$.

En verdad para $x \in [-a, a]$ cualquiera y $n \geq N_a$, se tiene

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - 1| \\ &= |1 - f_n(x)| \\ &\leq |1 - f_{N_a}(x)| \quad \clubsuit \text{ Por que la sucesión puntual en } x \text{ es} \\ &\leq |1 - f_{N_a}(a)| \quad \spadesuit \text{ Porque } f_{N_a} \text{ es decreciente } f_{N_a}(a) \geq \\ &\leq |f_{N_a}(a) - 1| \quad f_{N_a}(x). \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

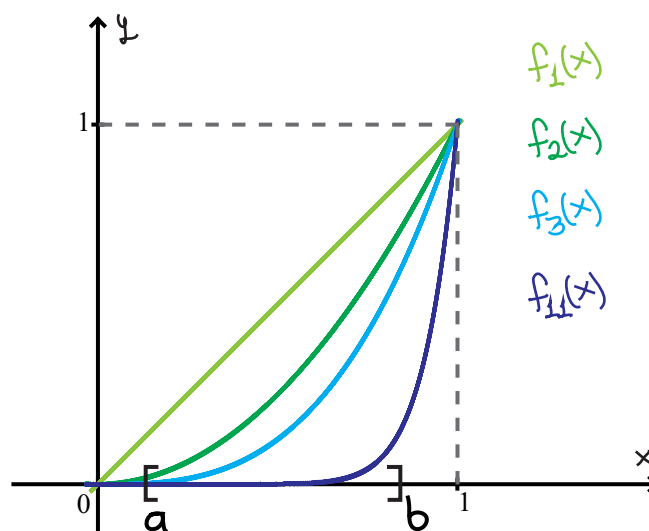
Ejer 3. Pruebe que $g_n(x) = x^n$ converge uniformemente en cada $[a, b] \subset [0, 1]$.

Solución 3. Primero elaboremos una grafica de la función $f_n(x) = x^n$ donde n tomado algunos valores

La sucesión de funciones

$$\begin{aligned} f_n : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Debemos probar que $f_n \Rightarrow f = 0$.

Figura 2.12: $f_n(x) = x^n$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, sabemos que si fijamos x cualquiera en $[a, b]$ entonces

$$f_n(x) = x^n \rightarrow 0$$

Convergencia Puntual Para dicho $\varepsilon > 0$, existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_x$

$$|f_n(x)| = |x^n| < \varepsilon$$

Pero debemos hacer esto independientemente del x , para ello tomemos $N = N_b$. Entonces cada $x \in [a, b]$, si $n \geq N$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - 0| &= |x^n| \\ &\leq |x^N| \\ &\leq |b^n| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Porque $0 \leq x \leq 1$ y $n \geq N_a$.

Porque f_N es creciente en el punto b .

Ejer 4. Sean $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y a_n una sucesión de reales tales que $a_n \rightarrow 0$. Definamos $f_n(x) = a_n f(x)$. Demuestre que f_n converge puntualmente a cero en cada $x \in D$ y que si f es acotada en D entonces f_n converge uniformemente a cero en D .

Solución 4. Convergencia Puntual

Sea $x \in D$ fijo por tanto $f(x)$ también es constante, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$$

Convergencia Uniforme

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera ya que f es acotada en D , existe M tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in D$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, existe N tal que $n \geq N$ entonces $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, con esto para cada $x \in D$ y $n \geq N$ se tiene que

$$|a_n f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

Ejer 5. Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Pruebe que si $0 \leq x \leq b$, entonces

$$\int_0^x \left(\int_0^y f(\xi) d\xi \right) dy = \int_0^x (x - y) f(y) dy$$

Solución 5. Ayuda Integración por Partes, remplacemos por $\varphi'(y) = 1$ entonces $\varphi(y) = y$ y $\psi(y) = \int_0^y f(\xi) d\xi$ entonces $\psi'(y) = f(y)$ por tanto al integral queda dada por

$$\begin{aligned} \int_0^x 1 \left(\int_0^y f(\xi) d\xi \right) dy &= \int_0^x \varphi'(y) \psi(y) dy \\ &= \varphi(y) \psi(y) \Big|_{y=0}^{y=x} - \int_0^x \varphi(y) \psi'(y) dy \\ &= x \int_0^x f(y) dy - \int_0^x y f(y) dy \\ &= \int_0^x (x - y) f(y) dy \end{aligned}$$

Ejer 6. Calcule

$$\int_a^b x e^x dx$$

Solución 6. Ayuda Integración por Partes, remplacemos por $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x dx$ entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$ por tanto al integral queda

dada por

$$\begin{aligned}
 \int_a^b x e^x dx &= \int_a^b f(x) g'(x) dx \\
 &= f(x) g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) g(x) dx \\
 &= x e^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x dx \\
 &= b e^b - a e^a - e^x \Big|_a^b \\
 &= b e^b - a e^a - (e^b - e^a) \\
 &= (b-1)e^b - (a-1)e^a
 \end{aligned}$$

Ejer 7. Encuentre todas las soluciones a la ecuación diferencial $f'(x) = r f(x)$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ y con $f(0) = y_0$

Solución 7.

Paso 1. $\frac{dy}{dx} = ry$, con $y_{x=0} = y_0$, es una ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{y} &= r dx \\
 \int \frac{dy}{y} &= \int r dx \\
 \lg y &= rx + c \\
 y &= e^{rx} k \text{ con } k = e^c = cte
 \end{aligned}$$

para hallar k se usa la condición dada

$$y_0 = e^{r \cdot 0} k = k$$

con esto, hemos obtenido la solución

$$y = f(x) = y_0 e^{rx}$$

Paso 2.

$$\boxplus = \begin{cases} f'(x) = r f(x) = \phi(x, f(x)) \text{ donde } \phi(x, y) = \phi(y) = ry \\ f(0) = y_0 \end{cases}$$

Sea R rectángulo cerrado y acotado cualquiera que contenga el punto $0, y_0$.

ϕ es continua porque es lineal.

ϕ es **Lipschitz** en y . ¿?

$$|\phi(y_1) - \phi(y_2)| = |ry_1 - ry_2| = |r||y_1 - y_2|$$

Si $\phi(x, y)$ es diferenciable con respecto a y en un rectángulo compacto entonces ϕ es **Lipschitz** con respecto a y entonces $[\boxtimes]$ tiene solución única. Por tanto $f(x) = y_0 e^{rx}$ es la única solución.

Ejer 8. Sea φ una función continuamente diferenciable con respecto a y :

$$\begin{aligned}\varphi : R \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y)\end{aligned}$$

Definida en un rectángulo cerrado y acotado R del plano. Pruebe que φ es **Lipschitz** con respecto a y .

Solución 8.

Ejer 9. a. Grafique $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ en $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

b. Es $f(x)$ continua en este intervalo. ¿? Tiene primitiva en este intervalo. ¿?

c. Encuentre una primitiva para $f(x)$ en $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

d. Calcule

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x}$$

Solución 9.

Ejer 10. a. Grafique $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$ en $-1 \leq x \leq 1$.

b. Calcule

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2-2} dx$$

Solución 10.

CAPÍTULO 3

Espacios Métricos

Definición 28. Un espacio métrico es una pareja (X, d) , donde X es un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- i. $d(x, y) > 0 \ \forall x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Proposición 7. *Todo espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, en particular todo espacio de Banach, es un espacio métrico con la distancia*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Demostración. ✓ i. $\|x - y\| > 0$ y $\|x - y\| = 0$ si y solo si $x - y = 0$ si y solo si $x = y$

✓ ii. $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|$

✓ iii. $\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$

◇

Ejemplo 4. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio métrico con $d(x, y) = |x - y|$

Ejemplo 5. En $\mathbb{R}^d$ se pueden definir varias normas:

p-norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x^i|^p \right)^{1/p}$$

con $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$. La más conocida es cuando $p = 2$ (norma euclidiana).

Norma del máximo

$$\|x\|_\alpha = \max\{|x^1|, |x^2|, \dots, |x^d|\}$$

No toda distancia d proviene de una norma

Ejemplo 6. Métrica trivial: X es un conjunto cualquiera

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Proposición 8. Si (X, d) es un espacio métrico y $B \subset X$ cualquiera, entonces (B, d_B) es un subespacio métrico de (X, d) donde

$$d_B(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in B$$

Teorema 36. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a $x \in X$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

O sea, $\|\cdot\|$ es una función continua de x en $\mathbb{R}$.

Demostración. $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$

$$\begin{array}{ll} \|x\| = \|(x - x_n) + x_n\| & \\ \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| & \\ \|x\| - \|x_n\| \leq \|x - x_n\| & \|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \\ -\|x - x_n\| \leq \|x_n\| - \|x\| & \leq \|x_n - x\| + \|x\| \\ \spadesuit & \clubsuit \\ \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| & \end{array}$$

De $\clubsuit$ y $\spadesuit$ obtenemos

$$-\|x - x_n\| \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

y por definición de valor absoluto

$$|||x_n| - |x||| \leq \|x_n - x\|$$

Como $x_n \rightarrow x$, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, o sea $|||x_n| - |x||| \rightarrow 0$ y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

◇

3.1. Sucesiones en Espacios Métricos

Definición 29. Sea (X, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementos de X (sucesión en X). Decimos que x_n converge a x en X si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{ si } n \geq N \text{ entonces } d(x_n, x) < \varepsilon$$

se escribe $x_n \rightarrow x$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

3.1.1. Sucesión de Cauchy

Definición 30. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{ si } n, m \geq N \text{ entonces } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Entonces se dice que (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Teorema 37. Sea $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$ $x_n \rightarrow x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ si y solo si

$$\begin{cases} x_n^1 \rightarrow x^1 \text{ en } \mathbb{R} \\ x_n^2 \rightarrow x^2 \text{ en } \mathbb{R} \\ \vdots \\ x_n^d \rightarrow x^d \text{ en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Corolario 9. $\mathbb{R}^d$ es completo.

3.2. Limites y Continuidad

Definición 31. Sean (X, d_x) y (Y, d_y) espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$. Decimos que f tiende a y cuando $x \rightarrow x_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{ si } 0 < d_x(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d_y(f(x), y) < \varepsilon$$

f es continua en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{ si } d_x(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Definición 32. Con las notaciones, se dice que $\Omega \subset X$, decimos que f es uniformemente continua en Ω si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x_1, x_2 \in \Omega \text{ si } d_x(x_1, x_2) < \delta \text{ entonces } d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Ejemplo 7. (X, d) espacio métrico $x_0 \in X$ fijo y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $f : X \rightarrow f(x) = d(x, x_0)$ f es uniformemente continua en X ¿?

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera entonces $\delta = \varepsilon$ satisface que si $x_1, x_2 \in X$ con $d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon$ entonces

$$\begin{aligned} d(f(x_1), f(x_2)) &= |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= |d(x_1, x_0) - d(x_2, x_0)| \\ &< \text{¿?} \end{aligned}$$

Con ayuda de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(x_2, x_0) &\leq d(x_2, x_1) + d(x_1, x_0) \\ d(x_2, x_0) - d(x_1, x_0) &\leq d(x_2, x_1) \\ -d(x_2, x_1) &\leq d(x_1, x_0) - d(x_2, x_0) \\ &\heartsuit \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_1, x_0) &\leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_0) \\ d(x_1, x_0) - d(x_2, x_0) &\leq d(x_1, x_2) \\ &\diamondsuit \end{aligned}$$

de $\diamond$ y $\heartsuit$

$$-d(x_2, x_1) \leq d(x_1, x_0) - d(x_2, x_0) \leq d(x_1, x_2)$$

$$|d(x_1, x_0) - d(x_2, x_0)| \leq d(x_1, x_2) < \varepsilon \quad \checkmark$$

Teorema 38. Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^d(x))$ entonces f es continua si y solo si $f^1, f^2, \dots, f^d$ son continuas.

Demostración. Usar el teorema sobre sucesiones. $\diamond$

Ejemplo 8.

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: t \mapsto (t^7, \sin t, e^t) \end{aligned}$$

α es continua porque cada α^i con $i = 1, 2, 3$ son continuas.

Teorema 39. Sea X un espacio métrico y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $f + g$, fg , $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ son continuas de X en $\mathbb{R}$. Además, si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ $\frac{f}{g}$ también es continua.

Teorema 40. Sean X, Y, Z espacios métricos,

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ continua en } x_0 \\ f : Y &\rightarrow Z \text{ continua en } y_0 = f(x_0) \end{aligned}$$

Entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es continua en x_0

Definición 33. Sean X, Y espacios métricos, $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones de X en Y y $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall (n \geq N, x \in X) \text{ si } n \geq N \text{ entonces } d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Teorema 41. Si $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f : X \rightarrow Y$ entonces f es continua.

3.3. Funciones u Operadores Lineales Continuos

Definición 34. Sean V, W espacios vectoriales normados con normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ respectivamente.

i. Una aplicación $L : V \rightarrow W$ es lineal si

$$\checkmark. L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\checkmark. L(\lambda v) = \lambda L(v) \quad \forall v \in V \text{ y } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ii. Una aplicación lineal $L : V \rightarrow W$ es acotada si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|L(v)\|_W \leq c\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Toda aplicación lineal $L : V \rightarrow W$ es continua. ¿?

Si $V = \mathbb{R}^d$ y $W = \mathbb{R}^n$ la respuesta es SI!!!. Sin embargo esto NO es cierto en general.

Teorema 42. Una aplicación lineal (función con operador) $L : V \rightarrow W$ donde V, W son espacios normados es continua si y solo si es acotada.

Demostración.

$\Leftarrow$ Supongamos que L es acotada. O sea existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|L(v)\|_W \leq c\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera, pongamos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Entonces si $\|v_1 - v_2\|_V < \delta$ ahora bien

$$\begin{aligned} \|L(v_1) - L(v_2)\|_W &= \|L(v_1 - v_2)\|_W \\ &\leq c\|v_1 - v_2\|_V \\ &= c\delta = c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto L es continua, es más aun es uniformemente continua.

$\Rightarrow L : V \rightarrow W$ es continua en V . En particular es continua en $v \in V$. Es decir,

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $\|v - 0\|_V = \|v\|_V < \delta$ entonces $\|L(v) - L(0)\|_W = \|L(v)\|_W < \varepsilon$

En particular, podemos tomar $\varepsilon = 1$: $\exists \delta > 0$ tal que $\|v\|_V < \delta$ entonces $\|L(v)\|_W < 1$. Tomemos $c = \frac{2}{\delta}$, $v \in V/\{0\}$ y $\tilde{v} = \frac{v}{c\|v\|_V}$. De este modo

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}\|_V &= \left\| \frac{v}{c\|v\|_V} \right\|_V \\ &= \frac{1}{c} \left\| \frac{v}{\|v\|_V} \right\|_V \\ &= \frac{1}{c} \cdot 1 = \frac{1}{\frac{2}{\delta}} = \frac{\delta}{2} < \delta\end{aligned}$$

Entonces $\|L(\tilde{v})\|_W < 1$ y así pues,

$$\begin{aligned}\|L(v)\|_W &= \|L(\|v\|_V c \tilde{v})\|_W \\ &= \|\|v\|_V c L(\tilde{v})\|_W \\ &= c\|v\|_V \|L(\tilde{v})\|_W \\ &= c\|v\|_V \quad \forall v \in V/\{0\}\end{aligned}$$

o sea L es acotada. ◇

Observación 1. Hemos demostrado mas:

Acotado $\Rightarrow$ Uniformemente Continuo $\Rightarrow$ Continuo $\Rightarrow$ continuo en 0.

Esencial para L lineal.

Corolario 10. *Toda aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua.*

Ejemplo 9. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Entonces existe una constante c tal que

$$\|L(x)\|_\infty \leq c\|x\|_\infty$$

Sea $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base en $\mathbb{R}^n$ si $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \sum x_j e_j$. Entonces, al aplicar L ,

$$L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j)$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}\|L(x)\|_\infty &= \left\| \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) \right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|L(e_j)\|_\infty \\ \|L(x)\|_\infty &\leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \sum_{j=1}^n \|L(e_j)\|_\infty\end{aligned}$$

Por Tanto

$$\|L(x)\|_\infty \leq c\|x\|_\infty$$

Ejemplo 10. Sea $x \in [0, 1]$ fijo entonces

$$\begin{aligned}\zeta_x &= C^0[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

Toma una función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y produce $f(x)$.

ζ_x es lineal. ¿?

$$\checkmark. \quad \zeta_x(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \zeta_x(f) + \zeta_x(g)$$

$$\checkmark. \quad \zeta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \zeta_x$$

ζ_x es continua. ¿?

$$(C^0[0, 1], \|\cdot\|_{C^0}) \xrightarrow{\zeta_x} (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

Entonces debemos probar que la aplicación esta acotada $|\zeta_x(f)| \leq c\|f\|_{C^0}$

$$\begin{aligned}|\zeta_x(f)| &= |f(x)| \\ &\leq \sup\{f(\xi) : 0 \leq \xi \leq 1\} \\ &\leq 1 \cdot \|f\|_{C^0} \quad \text{con } c = 1\end{aligned}$$

Ejemplo 11. Sea

$$\begin{aligned}D &: C'[0, 1] \longrightarrow C^0[0, 1] \\ f &\mapsto Df = f'\end{aligned}$$

Toma una función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y produce $f'(x)$.

D es lineal. ¿?

$$\checkmark. \quad D(f + g) = (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = D(f) + D(g)$$

$$\checkmark. \quad D(\lambda f) = (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) = \lambda Df$$

D es continua. ¿? (depende de las normas elegidas)

SI. Cuando,

$$(C'[0, 1], \|\cdot\|_{C'}) \xrightarrow{D} (C^0[0, 1], \|\cdot\|_{C^0})$$

debemos probar que la aplicación D es acotada,

$$\begin{aligned}\|Df\|_{C^0} &= \|f'\|_{C^0} \\ &\leq \|f'\|_{C^0} + \|f\|_{C^0} \\ &= \|f\|_{C'} \quad \text{con } c = 1\end{aligned}$$

NO. Cuando,

$$(C'[0, 1], \|\cdot\|_{C^0}) \xrightarrow{D} (C^0[0, 1], \|\cdot\|_{C^0})$$

Basta buscar un contraejemplo. En verdad tomemos, $f_n(x) = \sin nx$, $f_n \in C'[0, 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así $f'_n(x) = n \cos nx$ con esto

$$\|f_n\|_{C^0} = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} = 1 \text{ con } n \geq 2$$

$$\|Df_n\|_{C^0} = \|f'_n\|_{C^0} \sup\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\} = n \text{ con } n \geq 1$$

Por lo tanto no existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$\|Df_n\|_{C^0} \leq c\|f_n\|_{C^0}$ No es acotada entonces no es continua.

Definición 35. Sean V, W espacios vectoriales normados respectivamente por $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ y sea $L : V \rightarrow W$ una aplicación lineal continua. Se define,

$$\begin{aligned}\|L\| &= \sup\{\|L(x)\|_W : \|x\|_V = 1\} \\ &= \sup\{\|L(x)\|_W : \|x\|_V \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} : x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

Definición 36. Sean V, W espacios vectoriales normados con $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ y las aplicaciones lineales continuas $L_i : V \rightarrow W$ forman un espacio vectorial normado $B(V, W)$ con las operaciones

$$(L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

$$(\lambda L)(x) = \lambda L(x)$$

y con la norma dada en la definición anterior.

3.4. Bola Abiertas y Bola Cerrada

Definición 37. Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$.

○ $U(x_0, r) = \{x \in X / d(x, x_0) < r\}$ Bola **abierta** de centro x_0 y radio r .

● $B(x_0, r) = \{x \in X / d(x, x_0) \leq r\}$ Bola **cerrada** de centro x_0 y radio r .

Lema 10. *Condición de Hausdorff* Sea (X, d) un espacio métrico, $x, y \in X$ $x \neq y$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $U(x, \varepsilon) \cap U(y, \varepsilon) = \emptyset$.

Demostración. Sirve cualquier $\varepsilon \leq \frac{d(x, y)}{2}$

◇

Definición 38. Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$.

□ A es un conjunto **abierto** si $\forall x \in A \exists \varepsilon > 0$ tal que $U(x, \varepsilon) \subset A$.

■ B es un conjunto **cerrado** si $X \setminus B = B^c$ es abierto.

Ejemplo 12. Sean $X = \mathbb{R}$ y $d(x, y) = |x - y|$. El intervalo (a, b) , $a < b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ es abierto. ¿?

Tomando $r = \min\{|x - b|, |x - a|\}$, entonces $U(x, r) \subset (a, b)$

Ejemplo 13. Sea (X, d) un espacio métrico. La bola $U(x_0, r)$ $x \in X$, $r > 0$ es un subconjunto abierto de X . ¿?

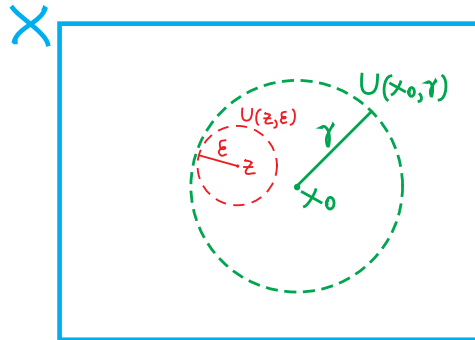


Figura 3.1: Bola Abierta

Sea $z \in U(x_0, r)$, debemos hallar un $\varepsilon > 0$ tal que $U(z, \varepsilon) \subset U(x_0, r)$.

Sea $\varepsilon = r - d(z, x_0)$ y $y \in U(z, \varepsilon)$ cualquiera entonces,

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, z) + d(z, x_0) \\ &< \varepsilon + d(z, x_0) \\ &= r - d(z, x_0) + d(z, x_0) = r \end{aligned}$$

Entonces $y \in U(x_0, r)$. O sea, $U(z, \varepsilon) \subset U(x_0, r)$.

Lema 11. Sea (X, d) un espacio métrico, toda bola abierta $U(x_0, r)$, $x_0 \in X$ y $r > 0$, es un subconjunto abierto de X .

Teorema 43. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces,

- i. $\emptyset, X$ son abiertos.
- ii. Si $\Omega_1, \Omega_2 \in X$ son abiertos entonces $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es abierto.
- iii. Si $(\Omega_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos entonces $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ es abierta.

Demostración.

- i. $\emptyset$ no tiene elementos, así que cumple la definición de abierto.

Ahora sea $x \in X$ y $r > 0$ entonces $U(x, r) \subset X$, así que X es abierto.

- ii. Ω_1, Ω_2 son abiertos y consideremos $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Sea $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ cualquiera, significa que $x \in \Omega_1$ y $x \in \Omega_2$, entonces $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ tal que

$$U(x, \varepsilon_1) \subset \Omega_1 \quad U(x, \varepsilon_2) \subset \Omega_2$$

tomemos el menor radio ó sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ entonces $U(x, \varepsilon) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$

- iii. $(\Omega_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos y consideremos $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ entonces $x \in \Omega_{i_0}$ (abierto) entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$U(x, \varepsilon) \subset \Omega_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$$

O sea $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ es abierto.

◇

Corolario 11. *Por inducción en la condición ii. al intersección de una familia finita de abiertos es un abierto.*

Ejemplo 14. $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera con la métrica trivial. Cuáles son los subconjuntos abiertos de (X, d) . ¿?

Paso inicial(en particular) $X = \{a, b, c\}$
 $\{a\}$ es abierto. ¿? $\exists \varepsilon > 0$ tal que $U(x, \varepsilon) = \{x \in X / d(x, a) < \varepsilon\} \subset \{a\}$ ¿?
 Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Por tanto los unitarios $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ son abiertos entonces $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ son abiertos. Todos los abiertos son

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Paso final(en general)

Sea X un conjunto no-vacio y $x \in X$, $\{x\}$ es abierto y así para todo $y \in X$ los abiertos de X son los elementos de $P(X)$

Teorema 44. *Sea (X, d) un espacio métrico $A \subset X$, A es cerrado si y solo si toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$ se tiene $x \in A$. (A es cerrado $\Leftrightarrow$ contiene los límites de las sucesiones que contiene)*

Demostración.

$\Rightarrow$ Sea A cerrado supongamos que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$ pero $x \notin A$ ó sea $x \in A^c = X \setminus A$ (abierto) entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $U(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$ (porque toda bola centrada en x debe contener infinitos x_{n_j} jotas, pero ellos están en A) por tanto $x \in A$

$\Leftarrow$ Si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ se tiene que $x_n \rightarrow x$, $x \in A$ entonces A es cerrado. (por contradicción ($\rightarrow \leftarrow$))

Si A es abierto, entonces $A^c = X \setminus A$ no es abierto entonces existe $x \in A^c$ tal que no hay $n \in \mathbb{N}$, $U(x, \frac{1}{n}) \subset X \setminus A$ se puede construir una sucesión x_n tal que $x_n \in A \cap U(x, \frac{1}{n})$ entonces $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ por tanto $x_n \rightarrow x$ por hipótesis $x \in A$. ($\rightarrow \leftarrow$) Se concluye que A es cerrado. ◇

Corolario 12. *Todo subconjunto finito de un espacio métrico es cerrado.*

Demostración. Si $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ toda sucesión de elementos de A converge a un elemento de A por el teorema anterior A es cerrado. $\diamond$

Corolario 13. *Todo subconjunto unitario de un espacio métrico es cerrado.*

Demostración. Los unitarios son finitos. $\diamond$

Definición 39. Sea (X, d) un espacio métrico $M \subset X$ y $x \in X$ es un punto frontera de M si toda bola $U(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ interseca a M y M^c .

★. ∂M es el conjunto de los puntos frontera de M .

★. $M^\circ = M \setminus \partial M$ es el interior de M .

★. $\bar{M} = M \cup \partial M$ la cerradura o adherencia de M .

Teorema 45. *Sea (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$. Entonces*

a. ∂M es cerrado.

b. $M^\circ = M \setminus \partial M$ es abierto.

c. $\bar{M} = M \cup \partial M$ es cerrado.

Demostración.

a. Idea $(\partial M)^c = X \setminus \partial M$ es abierto.

Sea $x \in X \setminus \partial M = (\partial M)^c$, ósea $x \notin \partial M$. Es decir, existe una bola $U(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ tal que

$$U(x, \varepsilon) \subset M \text{ o bien } U(x, \varepsilon) \subset M^c$$

Afirmamos que $U(x, \varepsilon)$ no pueden contener punto de ∂M porque si $y \in U(x, \varepsilon) \cap \partial M$ entonces existe $U(y, \eta)$, $\eta > 0$ tal que

$$U(y, \eta) \subset U(x, \varepsilon) \text{ y } (U(y, \eta) \cap M \wedge U(y, \eta) \cap M^c)$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $U(x, \varepsilon) \subset (\partial M)^c \forall x \in (\partial M)^c$, $(\partial M)^c$ es abierto y ∂M es cerrado.

b. Sea $x \in M^\circ = M \setminus \partial M$ entonces existe $U(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ tal que

$$U(x, \varepsilon) \subset M \text{ o bien } U(x, \varepsilon) \subset M^c$$

sin embargo la segunda posibilidad es imposible. Así $U(x, \varepsilon) \subset M \setminus \partial M$. De este modo M° es abierto.

c.

◇

Teorema 46. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$. f es continua si y solo si para todo abierto V de Y $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Donde $f^{-1}(V) = \{x \in X / f(x) \in V\}$ y se llama la imagen recíproca.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si f es continua para todo $x \in X$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Ahora sea $V \subset Y$ abierto y un $y_0 \in V$ entonces hay un $x_0 \in f^{-1}(V)$, $f(x_0) = y_0$ entonces existe un $\varepsilon > 0$ con $U(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ (abierto) y como f es continua existe un $\delta > 0$ con $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ cuando $d_X(x, x_0) < \delta$, ósea cuando $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ entonces $f^{-1}(V)$ es abierto.

$\Leftarrow$) SI $\forall V \in Y$ abierto $f^{-1}(V)$ abierto entonces sea $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ cualquiera tenemos que $f(x_0) \in Y$ entonces $U(f(x_0), \varepsilon) \subset Y$ abierto, por hipótesis $f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto en X por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que $d_X(x, x_0) < \delta$, o sea $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ entonces $f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$ es decir, $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ cuando $d_X(x, x_0) < \delta$, luego f es continua. ◇

Ejemplo 15. Sean X, Y espacios métricos, donde X es la métrica trivial

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Los abiertos en X en la métrica trivial son todos los subconjuntos de X . Sea U un abierto de Y , entonces $f^{-1}(U) \subset X$ por tanto, $f^{-1}(U)$ es abierto. Entonces, toda función $f : X \rightarrow Y$ es continua.

Observación 2. La pre imagen de un abierto U tiene que ser abierto. No al revés.

3.5. Convexo

Definición 40. Un subconjunto C de un espacio vectorial es convexo si $\forall x, y \in C$ se tiene

$$\{x + (y - x)t : t \in [0, 1]\} \subset C$$

$$\{ty + (1 - t)x : t \in [0, 1]\} \subset C$$

Ejemplo 16. B es un espacio de Banach, $x_0 \in B$, $r > 0$. La bola $U(x_0, r)$ es un convexo de B .

Sean $x, y \in U(x_0, r)$ cualesquiera. Entonces $\|x - x_0\| < r$ y $\|y - x_0\| < r$. Sea $t \in [0, 1]$, debemos tener $x + t(y - x) \in U(x_0, r)$ ósea

$$\begin{aligned} \|x + t(y - x) - x_0\| &= \|x + t(y - x + x_0 - x_0) - x_0\| \\ &= \|t(y - x_0) + (1 - t)(x - x_0)\| \\ &\leq t\|y - x_0\| + (1 - t)\|x - x_0\| \\ &< tr + (1 - t)r = r \end{aligned}$$

Definición 41. Un espacio métrico B es convexo si para todo par de subconjuntos abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset B$ tal que

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = B \text{ y } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

Se tiene que $\Omega_1 = \emptyset$ o bien $\Omega_2 = \emptyset$ $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ separación de B .

B es convexo si no admite una separación en conjuntos no vacíos.

Ejemplo 17. X un conjunto de más de un elemento con la métrica trivial. X no es convexo.

Primer Caso: $X = \{a, b\}$ los abiertos son $\emptyset, \{a\}, \{b\}, X$. Sean $\Omega_1 = \{a\}$ y $\Omega_2 = \{b\}$ tenemos

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = X \text{ y } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

pero $\Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$.

Segundo Caso: X tiene más de dos elementos, sea $a \in X$. Sean $\Omega_1 = \{a\}$ y $\Omega_2 = X \setminus \Omega_1$ tenemos

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = X \text{ y } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

pero $\Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$.

Proposición 9. *Sea X un espacio métrico convexo B un subconjunto no vacío de X que es abierto y cerrado. Entonces $B = X$.*

Demostración. Sean $\Omega_1 = B$ y $\Omega_2 = X \setminus B$ entonces tenemos

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = X \text{ y } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

Como X es convexo y $\Omega_1 = B \neq \emptyset$, entonces $\Omega_2 = X \setminus B = B^c = \emptyset$. Así $B = X$ $\diamond$

3.6. Completitud de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \begin{cases} \checkmark \text{ Axiomas de Orden } <, >, \leq, \geq \\ \checkmark \text{ Axiomas de Campo } \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle \\ \checkmark \text{ Axiomas de Completitud sup} \end{cases}$$

3.6.1. Axiomas de Completitud

Todo subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo.

Definición 42. El supremo es la mínima cota superior. $S \subset \mathbb{R}$, un supremo de S en un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

1. Para todo $t \in S$, $t \leq t_0$. (cota superior)
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $t \in S$ tal que $t_0 \leq t + \varepsilon$.

Teorema 47. *Todo espacio vectorial normado es convexo. Con más precisión, todo subconjunto convexo S de un espacio vectorial normado es convexo.*

Demostración. Por contradicción($\rightarrow\leftarrow$)

Supongamos que B no es convexo. Entonces, existen abiertos no vacíos $\Omega_1, \Omega_2 \subset B$ tal que

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = B \text{ y } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

Sean $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ consideremos

$$A = \{\tau \in [0, 1] \text{ Para todo } l \text{ se tiene } ly + (1 - l)x \in \Omega_1\}$$

Notemos que $0 \in A$, $A \neq \emptyset$. A es acotado superiormente todo $\tau \in A$ $\tau \leq 1$, entonces por axioma de completitud implica que A tiene supremo, sea $t = \sup A$. Sea $\xi = ty + (1 - t)x$, Vamos a probar que $\xi \notin \Omega_1$, $\xi \notin \Omega_2$, esta es la contradicción porque $\Omega_1 \cup \Omega_2 = B$.

Esto lo haremos tomando una bola centrada en ξ y viendo que ella tiene puntos en Ω_1 y Ω_2 lo cual es imposible porque Ω_1, Ω_2 son abiertos y $\Omega_1 \cup \Omega_2 = B$.

Sea $\xi = ty + (1 - t)x$, como $\Omega_1 \cup \Omega_2 = B$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ debemos tener ó bien $\xi \in \Omega_1$ ó bien $\xi \in \Omega_2$.

Si $\xi \in \Omega_1$ como Ω_1 es abierto existe $r_1 > 0$ tal que $U(\xi, r_1) \subset \Omega_1$

Si $\xi \in \Omega_2$ como Ω_2 es abierto existe $r_2 > 0$ tal que $U(\xi, r_2) \subset \Omega_2$

Si logramos probar que toda bola $U(\xi, r)$ interseca a Ω_1, Ω_2 hemos producido una contradicción

FALTAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

◇

Conclusiones

El otro problema

Bibliografía

- [1] Zalamea, F. Fundamentos de matematicas. Universidad Nacional, Colombia, 2007.
- [2] Apostol, Tom M. Calculus, volumen I, Wiley, 1967.
- [3] Jost, J. Postmodern Analysis. Springer, Berlin, 1998.
- [4] Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [5] Lima, Elon Lages. Análise Real. Quarta edição, Impa, Rio de Janeiro, 1999.
- [6] Hairer, E. & Wanner, G. Analysis by its history, Springer, New York, 1996.