

NOTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

ARNOLD OOSTRA

DIGITADO POR JAVIER G. RIVERA G.



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

IBAGUÉ, MARZO DE 2011

Índice general

Introducción	8
1. Geometría Diferencial de Superficies	9
1.1. Calculo Diferencial en Varias Variables	9
1.1.1. Difeomorfismo	11
1.2. Cartas y Superficies	12
1.3. Superficies de Nivel	19
1.4. Ejercicios	21
2. Cálculo en superficies	23
2.1. Lectura de carta	24
2.2. Plano tangente	31
2.2.1. Vectores tangentes	32
2.3. Funciones diferenciables entre superficies	35
2.4. Funcionales diferenciables	41
2.5. Campos Vectoriales	45
2.6. Formas diferenciables	47
2.6.1. Dos métodos de construcción	49
2.7. Cálculo Integral en superficies	52
2.8. Ejercicios	56
3. Geometría en superficies	58
3.1. Primera forma fundamental	58
3.2. Ángulo, longitud de arco y área	61
3.3. Función de Gauss	64
3.4. Operador de horma	65

ÍNDICE GENERAL

iii

3.5. Curvatura 68

3.6. Ejercicios 93

Introducción

Tarea!!!

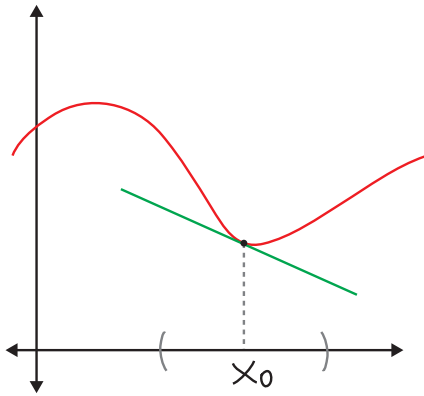
CAPÍTULO 1

Geometría Diferencial de Superficies

1.1. Cálculo Diferencial en Varias Variables

Una Variable: Sea $f : u \subseteq \mathbb{R}$ en $x_0 \in u$ si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



La derivada es la pendiente de la tangente en x_0 , también es una transformación lineal $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que aproxima a f en x_0 .

En General: Sea u una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $F : u \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. F es diferenciable en x_0 si existe una transformación lineal $dF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + dF(x_0)(h) + \varepsilon \|h\|$$

donde $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Se nota que $h \in \mathbb{R}^n$ y $dF(x_0)(h) \in \mathbb{R}^m$.

★ Si F es diferenciable en x_0 entonces es continua en x_0 .

Prueba: Cuando $dF(x_0)$ es lineal,

$$\lim_{h \rightarrow 0} dF(x_0)(h) = dF(x_0)(0) = 0$$

Además $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon \|h\| = 0$ luego $\lim_{h \rightarrow 0} F(x_0 + h)$ existe y es $F(x_0)$ $\diamond$

¿Y cuál es la matriz de $dF(x_0)$?

La matriz de $dF(x_0)$, llamada matriz de **Jacobi**, tiene como fila las derivadas parciales de las m funciones componentes.

Ejemplo 1. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x \cos y, x \sin y, xy)$, F es diferenciable y su matriz de Jacobi es

$$dF = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ y & x \end{bmatrix}$$

- ★ Si todas las derivadas parciales existen y son continuas entonces F es diferenciable.
- ★ Sea ahora $u \in \mathbb{R}^m$ unitario fijo, la derivada direccional de F , en la dirección de u , es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + hu) - F(x_0)}{h} = dF_u(x_0)$$

- ★ Si la función es diferenciable, entonces existe todas las derivadas direccionales y además

$$dF_u(x_0) = dF(x_0)(u)$$

En general, no al revés. A menos claro está, que todas sean continuas.

- ★ Si F es diferenciable en cada $x_0 \in u$, la derivada es una función

$$\begin{aligned} dF : u &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x_0 &\mapsto dF(x_0) \end{aligned}$$

Las derivadas de orden superior representan un problema interesante (*Análisis Funcional*)

- ★ Si G es diferenciable en y_0 y F es diferenciable en $x_0 = G(y_0)$, entonces la compuesta FG es diferenciable en y_0 y además

$$d(FG)(y_0) = dF(x_0)G'(y_0)$$

Esta es la regla de la cadena.

En adelante y en todo el curso salvo que se diga lo contrario, las funciones son infinitamente diferenciables(es decir, existe todas las derivadas parciales de todos los órdenes).

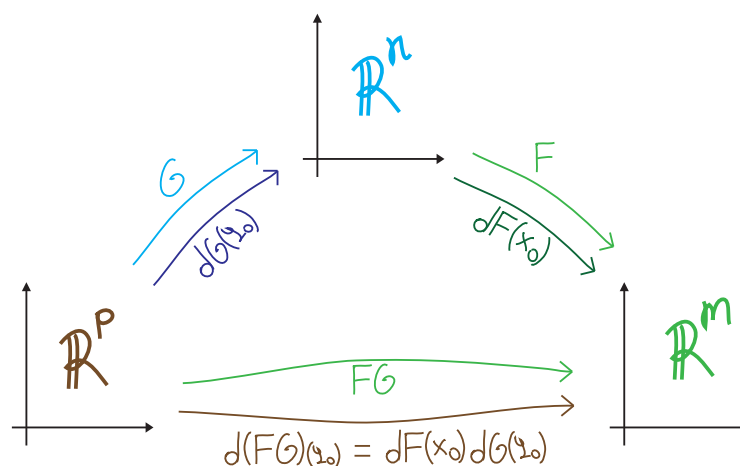
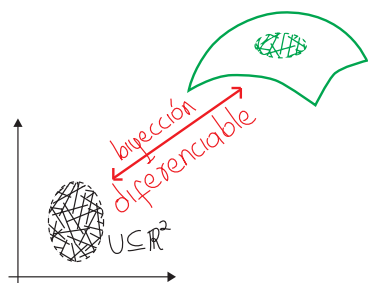


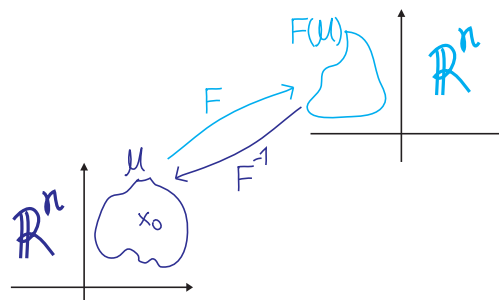
Figura 1.1: Regla de la Cadena

1.1.1.1. Difeomorfismo



♣ Un **difeomorfismo** es una función biyectiva diferenciable y cuya inversa también es diferenciable.

♠ Un **difeomorfismo local** (cerca de x_0) es una función $F : u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, u vecindad de x_0 , cuya restricción es un difeomorfismo.



Dos Resultados Importantes:

Teorema de la Función Inversa

Teorema 1. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $x_0 \in U$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en U . F es un difeomorfismo local cerca a x_0 .

Si y solo si $dF(x_0)$ es invertible.

Si y solo si el determinante de la matriz de Jacobi es distinto de cero.

Teorema de la Función Implícita

Caso Particular $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 + y^2$

$$\text{Nivel 25 } \{(x, y) : F(x, y) = 25\}$$

en este caso se trata de una circunferencia. En general, y no es función de x (ó x de y). Pero si se toma una vecindad de (x, y) entonces y si puede ser función de x , $y = \sqrt{5^2 - x^2}$.

¿Pero esto ocurre siempre?

En todos los puntos y es función de x excepto en $(5, 0)$ y en $(-5, 0)$.

¿Qué pasa en estos puntos?

Si miramos la derivada vemos que el diferencial se anula.

Teorema 2. Sea $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, abierto y $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $U \times V$. La ecuación

$$F(x_0, y_0) = z_0$$

define implícitamente una única función diferenciable de $x_0 \in U$ a $y_0 \in V$ si y solo si la restricción de $dF(x_0, y_0)$ a $\mathbb{R}^m$ es invertible. Es decir, si y solo si el subdeterminante $m \times m$ es distinto de cero.

1.2. Cartas y Superficies

Definición 1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto en el espacio. Una carta en S es un homeomorfismo diferenciable, regular $\phi : D \rightarrow S$ de un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en S .

✓ *Homeomorfismo:* Función biyectiva continua y con inversa también continua. En realidad no se pide que sea sobreyectiva en S , sino solo inyectiva, continua y que la inversa relativa $\phi(D) \rightarrow D$ también sea continua.

✓ *Diferenciable:* $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Se pide entonces que las funciones x, y, z tengan todas las derivadas parciales (de todos los ordenes, porque diferenciable aquí significa infinitamente diferenciable)

$$d\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = [\phi_u \quad \phi_v]$$

ϕ_u : derivada de ϕ con respecto a u entonces $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$

ϕ_v : derivada de ϕ con respecto a v entonces $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$

✓ *Regular*: En cualquier punto q de D la diferencial $d\phi(q)$ es inyectiva. Esto equivale a pedir que los dos vectores ϕ_u, ϕ_v sean linealmente independientes. En otras palabras si el vector

$$\phi_u \times \phi_v \text{ es distinto de cero.}$$

✓ *Dominio*: Abierto conexo (de un solo pedazo)

Ejemplos 1.

- **El Plano** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes (en particular no

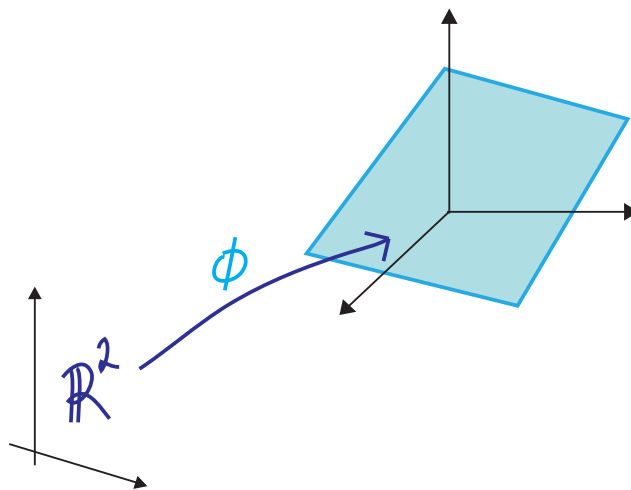


Figura 1.2: Carta del plano $\phi(s, t) = s\alpha + t\beta$

nulos), Sea $D = \mathbb{R}^2$ (dominio) y sea $\phi(s, t) = s\alpha + t\beta$

✓ ϕ recorre el plano determinado por α y β .

✓ $\phi_s = \alpha$ y $\phi_t = \beta$, son L.I. luego ϕ es diferenciable y regular.

✓ La inversa de ϕ es lineal y por tanto continua.

Así ϕ es una carta.

- **La Esfera**(La esfera unidad denotada S^2 , en general S^n es la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$)

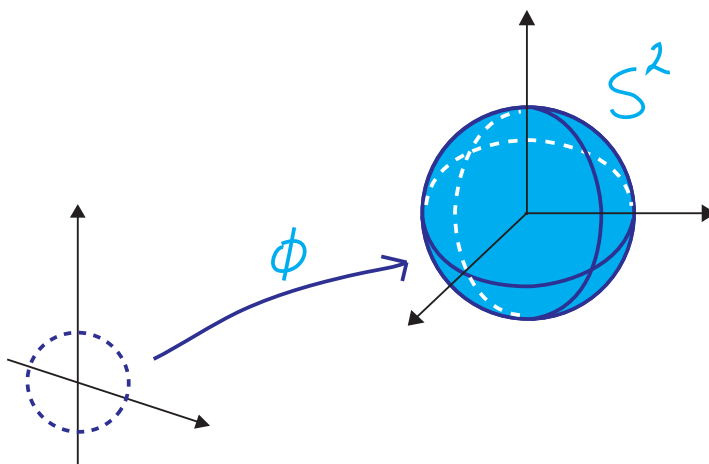


Figura 1.3: Carta de la esfera $\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$

Sea $\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ el disco abierto es un dominio.

✓ ϕ recorre el hemisferio superior (norte) de la esfera.

✓

$$\begin{aligned}\phi_u &= \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) \\ \phi_v &= \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) \\ \phi_u \times \phi_v &= \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 1\right) \neq (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Así, este producto nunca es cero, luego ϕ_u, ϕ_v son L.I. y ϕ es diferenciable y regular.

✓ La inversa de ϕ continua, es la proyección.

Por tanto, ϕ es una carta.

- **La Esfera**(Con otra carta mas geográfica)(coordenadas polares)

Sea $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$, el dominio $D = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

✓

$$\begin{aligned}
\phi_u &= (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) \\
\phi_v &= (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v) \\
\phi_u \times \phi_v &= (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v) \\
&= \cos v (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = \cos v \phi(u, v) \text{?}
\end{aligned}$$

✓ ϕ recorre la esfera (salvo un meridiano), de hecho $\|\phi(u, v)\|^2 = \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v = 1$ luego $\|\phi_u \times \phi_v\| = |\cos v| \|\phi\| = |\cos v|$ y $|\cos v| > 0$ en $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, de modo que $\|\phi_u \times \phi_v\| \neq 0$

✓ La inversa de ϕ continua, es la proyección.

Por tanto, ϕ es una carta.

Definición 2. Una superficie es un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ junto con una familia de cartas $\{\phi\}$ que cubren a S . Esto significa que para cada punto $p \in S$ existe alguna carta ϕ en la familia cuya imagen o recorrido incluye a p

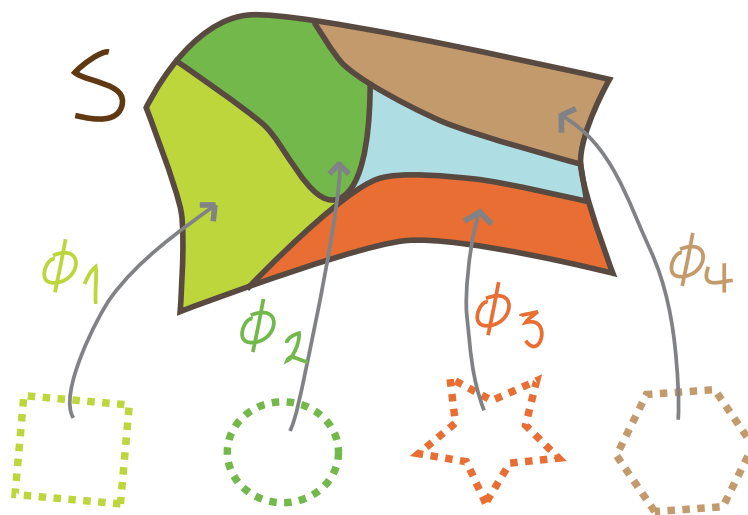


Figura 1.4: Atlas

La familia $\{\phi\}$ de cartas de S , se denomina Atlas.

Ejemplos 2.

• **El Plano:** Atlas = $\{\phi\}$, $\phi(s, t) = s\alpha + t\beta$.

• **El Esfera:** Atlas = $\{\phi_i\}$, con $i = 1, \dots, 6$

$$\phi_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

$$\phi_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

$$\phi_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$$

$$\phi_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$$

$$\phi_5(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

$$\phi_6(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

• **El Esfera:** Atlas "esférico" $\{\phi_1, \phi_2\}$

$$\phi_1(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

$$\phi_2(u, v) = (??)$$

Repaso 1. Superficie: Conjunto abierto con cartas.

Carta: Función $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto conexo (un pedazo)

✓ Inyectiva

✓ Diferenciable, $d\phi$ Inyectiva ($\phi_u \times \phi_v \neq 0$)

✓ ϕ^{-1} continua

Superficie: $(S, \{\phi_i\}_{i \in I})$. S conjunto de $\mathbb{R}^3$. $\phi_i : D_i \rightarrow S$ carta, para cada $p \in S$ existe i con $p \in \phi_i(D_i)$.

Ejemplos 3.

✦ **Plano:** determinado por $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ L. independientes

$$\phi(s, t) = s\alpha + t\beta \quad D = \mathbb{R}^2$$

✦ **Esfera:** $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

◦ $\{\phi_i\}_{i=1}^6$ donde $\phi_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ y su dominio

$$D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$$

◦ $\{\phi_i\}_{i=1}^2$ donde $\phi_1(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ y su dominio

$$D = (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

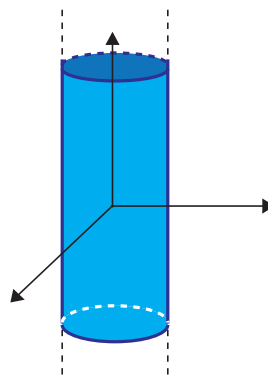
✠ Cilindro:

$$\phi_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v): 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$$

$$D_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

$$\phi_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v): -\pi < u < \pi, v \in \mathbb{R}$$

$$D_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$$



¿? ϕ es carta ¿?

$$\phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\phi_v = (0, 0, 1)$$

$$\phi_u \times \phi_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = 1$$

♣. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Su grafica es

$$S_f = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$

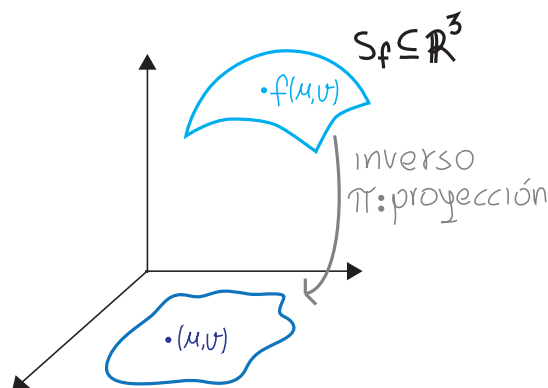
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, S_f \subseteq \mathbb{R}^3$. ¿? Cual carta ¿?

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$\phi_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)$$

$$\phi_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$$



como $\phi_u \times \phi_v \neq \vec{0}$, siempre $d\phi$ es inyectiva y así ϕ es carta. ◇

Afirmación 1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio (abierto-conexo), y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función real diferenciable. El grafico de f ,

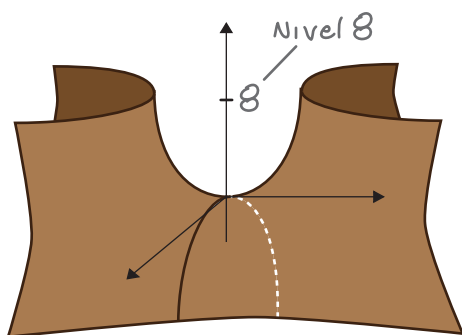
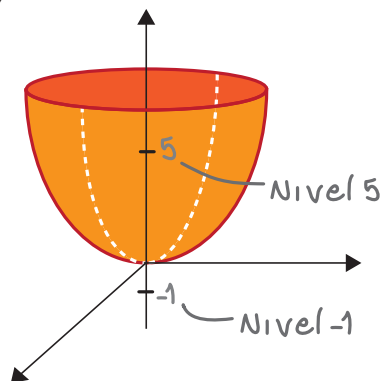
$$S_f = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$

es una superficie (en el sentido de la Geometría Diferencial). A veces se llama superficie de Monge.

Ejemplos 4 (Mas Casos Particulares:).◇ **Paraboloide:**

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = ax^2 + by^2, \quad a, b > 0$$

◇ **Silla de Montar:**

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

$$f(x, y) = ax^2 - by^2, \quad a, b < 0$$

Nota 1. Basta una carta para cubrir una superficie de MONGE.

Nota 2 (General). Sea $f : A \rightarrow B$ una función con A, B conjuntos abiertos. Grafico $G_f \subseteq A \times B$

$$\star G_f = \{(x, f(x)) \in A \times B\}$$

$$\star G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

$$\star G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

El grafico es subconjunto de $A \times B$.

◇ $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ entonces $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

♡ $A \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq \mathbb{R}$ entonces $G_f \subseteq \mathbb{R}^3$.

Conjunto de nivel: $N_b \subseteq A$ para $b \in B$ fijo.

$$N_b = \{x \in A : f(x) = b\}$$

Cada nivel es un subconjunto del dominio A .

◇ $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ entonces $N_b \subseteq \mathbb{R}^n$.

♡ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces $N_b \subseteq \mathbb{R}^2$.

1.3. Superficies de Nivel

Varios ejemplos pueden verse como conjuntos de nivel.

✓ **Esfera:** $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es el nivel 1 de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. F es diferenciable $dF = (2x, 2y, 2z) = \nabla F$.

✓ **Cilindro:** $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ es el nivel 1 de $F(x, y, z) = x^2 + y^2$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. F es diferenciable $dF = (2x, 2y, 0) = \nabla F$.

Afirmación 2. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio (abierto-conexo), y $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Dado un punto $c \in F(U)$ tal que dF no se anula en el conjunto de nivel.

$$S_c = \{(x, y, z) \in U : F(x, y, z) = c\}$$

Entonces este conjunto es una superficie (en el sentido de la Geometría Diferencial), la superficie de nivel c .

Demostración. Dado $(x_0, y_0, z_0) \in S_c$, sin pérdida de generalidad se puede suponer $\frac{\partial}{\partial z_0} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Implícita. Existe una función diferenciable f en una vecindad de (x_0, y_0, z_0) tal que $z = f(x, y)$, para todos los puntos de S_c en esa vecindad. pero entonces esa porción de S_c es una superficie de MONGE y puede construirse una carta S_c que contiene a (x_0, y_0, z_0) . $\diamond$

Nota 3. En este caso no puede decirse nada sobre la cantidad de cartas.

Ejemplos 5.

◇ **Elipsoide:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ superficie de nivel de $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

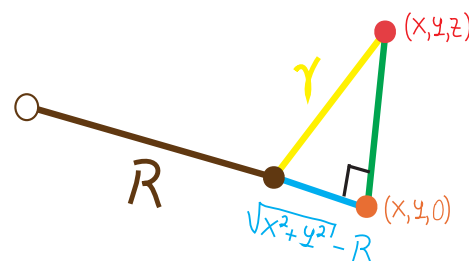
◇ **Hiperboloide:** $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

◇ **Toro:** $z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 = r^2$ superficie de nivel de $F(x, y, z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2$

En este triángulo rectángulo se tiene

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 = r^2$$

R es el radio giro de la circunferencia mayor, r es el radio de la circunferencia menor. Se pide $R > r$.



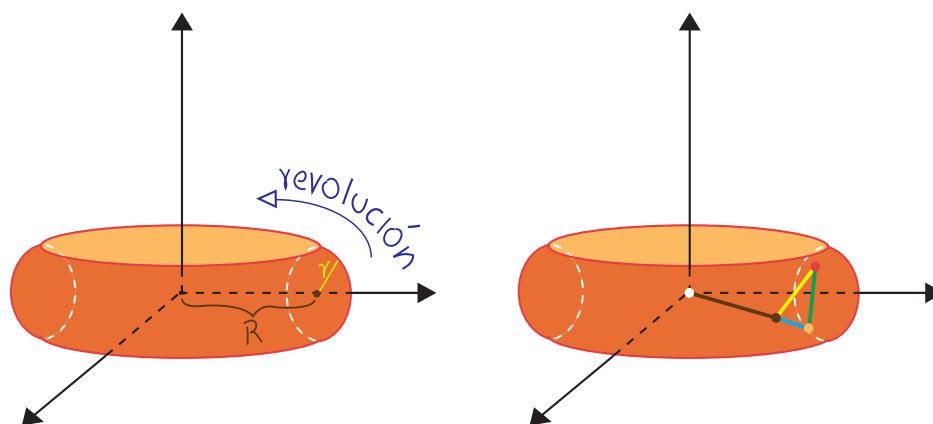
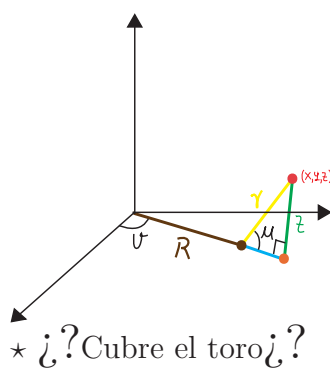


Figura 1.5: Toro de revolución

Una carta que cubre “casi todo” el toro es

$$\phi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$



$$0 < u < 2\pi,$$

$$0 < v < 2\pi$$

$$x = (R + r \cos u) \cos v$$

$$y = (R + r \cos u) \sin v$$

$$z = r \sin u$$

$$x^2 + y^2 = (R + r \cos u)^2, \quad z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2 \sin^2 u + r^2 \cos u = r^2$$

* ¿? Es carta ¿?

$$\begin{aligned}
\phi_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\
\phi_v &= -(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0) \\
\phi_u \times \phi_v &= (-r \cos u \cos v (R + r \cos u), -r \cos u \sin v (R + r \cos u), -r \sin u (R + r \cos u)) \\
&= -r(R + r \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \\
\|\phi_u \times \phi_v\|^2 &= r^2(R + r \cos u)^2[\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u] \\
\|\phi_u \times \phi_v\| &= r(R + r \cos u) > 0
\end{aligned}$$

✓ Inyectiva

✓ Diferenciable, $d\phi$ Inyectiva ($\phi_u \times \phi_v \neq 0$)

✓ ϕ^{-1} continua. Por lo tanto es carta

1.4. Ejercicios

1. Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos funciones definidas como sigue.

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2)$$

$$g(u, v, w) = (uv^2w^2, w^2 \sin v, u^2 e^v)$$

- a) Calcule las matrices jacobianas Df y Dg
 - b) Encuentre la función compuesta $h = fg$
 - c) Encuentre la matriz jacobiana Dh
2. Encuentre un atlas con (dos) cartas en coordenadas esféricas para la esfera S^2 .
3. a) En el plano yz de $\mathbb{R}^3$ bosqueje la curva con ecuaciones paramétricas

$$y = \sin v \qquad z = \cos v + \log \tan \frac{v}{2},$$

$0 < v < \pi$, llamada *tractriz*.

- b) Demuestre que el segmento tangente a la tractriz comprendido entre el eje z y el punto de tangencia tiene siempre longitud igual a 1.

c) Por rotación de la tractriz alrededor del eje z se obtiene la aplicación

$$\phi(u, v) = \left(\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v + \log \tan \frac{v}{2} \right),$$

$0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$. Demuestre que es una carta en “casi todos” los puntos de su dominio. La imagen de ϕ con $z > 0$ (incluido el meridiano faltante) es una superficie de revolución conocida como *seudoesfera*.

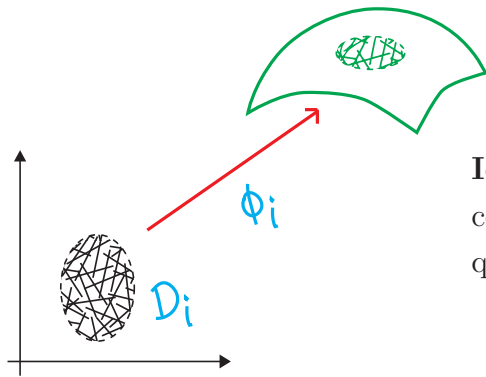
4. Demuestre que la esfera S^2 y el elipsoide dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

son superficies difeomorfas.

CAPÍTULO 2

Cálculo en superficies



Idea: Una superficie (de dimensión dos) es un conjunto que “localmente” es igual a $\mathbb{R}^2$, pero que “vive” en otro espacio (como $\mathbb{R}^3$).

Formalización: Conjunto abierto con cartas $\phi_i : D_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$

- ✓ Inyectiva
- ✓ Diferenciable, $d\phi_i$ Inyectiva
- ✓ ϕ_i^{-1} continua

Objetivo: Hacer cálculo (diferencial e integral) sobre las superficies.

Problema inmediato: Los límites sobre la superficie.

Solución propuesta: Imaginan la superficie con $\mathbb{R}^2$, esto se logra a través de las cartas.

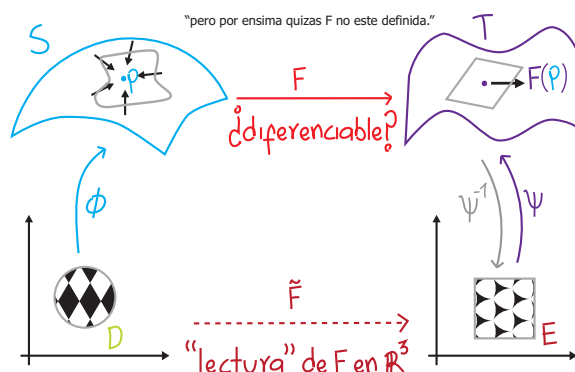


Figura 2.1: Lectura de carta

2.1. Lectura de carta

Definición 3. Sean S, T superficies y $F : S \rightarrow T$ una función. Si ϕ, φ son cartas de S y T respectivamente, entonces la lectura de F (en estas cartas) es

$$\tilde{F} = \varphi^{-1} F \phi$$

Si $\phi : D \rightarrow S$ tiene dominio D , entonces $\tilde{F} = \varphi^{-1} F \phi : D \rightarrow \varphi(F\phi(D))$.

Ejemplo 2 (Proyección estereográfica de la esfera). La proyección estereográfica envía un punto $p \in S^2 - \{N\}$ en el punto $F(p)$ del plano tal que $p, F(p)$ y N están en línea recta.

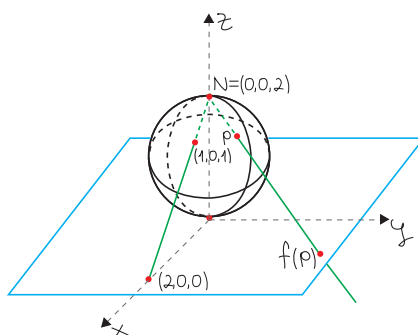


Figura 2.2: Proyección estereográfica de la esfera

Cálculo de F : Sea $p = (x, y, z)$, entonces $F(x, y, z) = ?$

Ecuación de la recta: Pasa por $N = (0, 0, 2)$

La dirección de $p - N = (x, y, z) - (0, 0, 2) = (x, y, z - 2)$

Carta en el plano cuando

$$\begin{aligned} l(t) &= N + t(p - N) & 2 + t_0(z - 2) &= 0 \\ &= (0, 0, 2) + t(x, y, z - 2) & t_0(z - 2) &= -2 \\ &= (tx, ty, 2 + t(z - 2)) & t_0 &= \frac{-2}{z - 2} = \frac{2}{2 - z} \text{ pues } z < 2 \end{aligned}$$

$F(p) = l(t_0) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}, 0\right)$ para $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}, 0\right)$$

(Nótese que F no está definida en todo $\mathbb{R}^3$)!!!

Una lectura de F :

- Carta para la esfera: $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, 1 + \sin v)$
- Carta para el plano: $\varphi(s, t) = (s, t, 0)$ y $\varphi^{-1}(x, y, 0) = (x, y)$
- La lectura de la proyección estereográfica es:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \varphi^{-1}F\phi(u, v) \\ &= \varphi^{-1}F(\cos u \cos v, \sin u \cos v, 1 + \sin v) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{2 \cos u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{2 \sin u \cos v}{1 - \sin v}, 0\right) \\ &= \left(\frac{2 \cos u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{2 \sin u \cos v}{1 - \sin v}\right) \\ &= \frac{2 \cos v}{1 - \sin v}(\cos u, \sin u) \end{aligned}$$

La función $F : S \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3$ se está leyendo en una función $\tilde{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definición 4. (En los mismos términos de la definición anterior). La función $F : S \rightarrow T$ entre superficies es diferenciable en $p \in S$ si su lectura $\tilde{F} = \varphi^{-1}F\phi$ es diferenciable en $q = \phi^{-1}(p)$, siendo ϕ una carta que cubre a p y φ una carta que cubre a $F(p)$. F es diferenciable(G.D.) en $p \in S$ si $\tilde{F}$ es diferenciable(usual) en q .

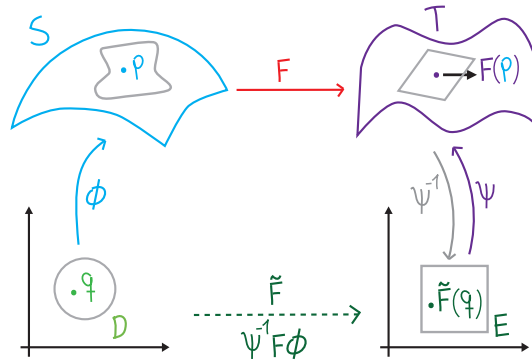


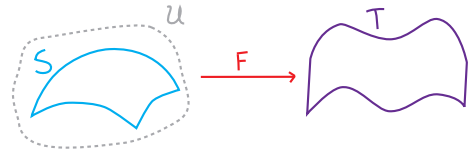
Figura 2.3: Lectura diferenciable

Ejemplo 3.

¿? La proyección estereográfica es diferenciable en algún punto de $S^2 - \{N\}$ ¿?

Como $\tilde{F}$ es diferenciable en todo su dominio, se “afirma” que la proyección F es diferenciable en todo su dominio $S^2 - \{N\}$

Conjetura 1. Supongamos que $S \subseteq u$ abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $F : u \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida en toda la vecindad de S . Si F es diferenciable en el sentido usual de $\mathbb{R}^3$ (derivadas parciales etc.) entonces es diferenciable en el sentido de la geometría diferencial.



Demostración. Dadas las cartas ϕ, ψ para puntos $p, F(p)$ se tiene:

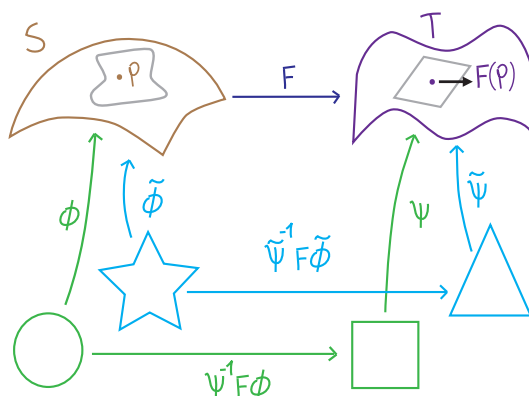
- ✓ ϕ es diferenciable (usual) pues es una carta,
- ✓ F es diferenciable (usual) por hipótesis,
- ✓ ψ^{-1} es diferenciable (usual) de manera local por el teorema de la función inversa, puesto que $d\psi$ es inyectiva.

Por la regla de la cadena, $\psi^{-1}F\phi$ es diferenciable (usual) luego por definición F es diferenciable en el sentido de la G. Diferencial. $\diamond$

Definición 5. Dos superficies S y T son diferenciables si existe una función biyectiva $F : S \rightarrow T$ diferenciable (G. Diferencial) con inversa $F^{-1} : T \rightarrow S$ también diferenciable (G. Diferencial).

Ejemplo 4. La esfera “punteada” (esfera menos un punto) y el plano son difeomorfos.

Pequeña pregunta: $\psi^{-1}F\phi$ es diferenciable (usual).



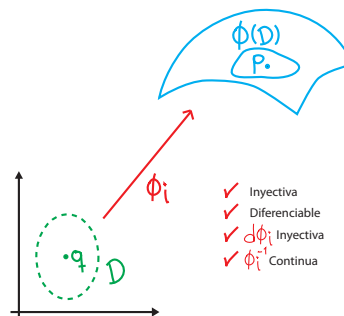
¿?Que me garantiza que $\tilde{\psi}^{-1}F\tilde{\phi}$ también es diferenciable¿?

En una superficie $\{S \subseteq \mathbb{R}^3, \{\phi_i\}_{i \in I}\}$.

$F : S \rightarrow T$ es diferenciable en $p \in S$ si

$\tilde{F} = \psi^{-1}F\phi$ lo es en $q = \phi^{-1}(p)$.

¿?Y esto depende de ϕ, ψ ¿?



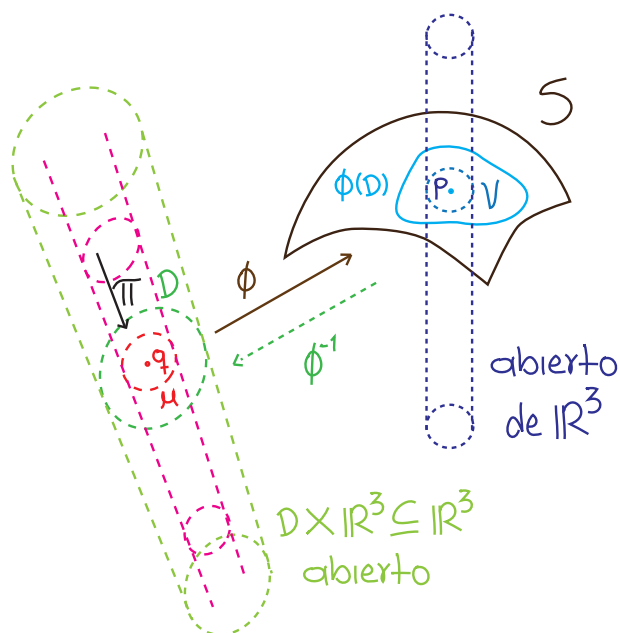
Primer problema: Si $\phi : D \rightarrow S$ es una carta,

¿? ϕ^{-1} es diferenciable¿?

ϕ^{-1} está definida solo en una porción de S , que (en general) no es abierto de $\mathbb{R}^3$. Así que, en principio, no tiene sentido que ϕ^{-1} sea diferenciable.

Idea: “Ampliar” la superficie a un abierto donde sí tenga sentido la diferenciableidad.

Construcción: Como $d\phi$ es inyectivo en q , alguna de las coordenadas de $\phi_u \times \phi_v$ es distinto de cero en q . Sin pérdida de generalidad, supongamos que la tercera componente no es cero. Por la continuidad de las derivadas parciales, existe una vecindad u de q



en la cual sucede esto. Sea $v = \phi(u)$, entonces $\phi : u \rightarrow v$ es biyectiva con inverso $\phi^{-1} : v \rightarrow u$ la función original ϕ se extiende a una función $\eta : u \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ como sigue:

$$\eta(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

donde x, y, z son componentes de ϕ

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

Se nota que η extiende ϕ porque $\phi(u, v) = \eta(u, v, 0)$.

¿? η es diferenciable ¿?

$$d\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial(z+t)}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial(z+t)}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial(z+t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$\det(d\eta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \text{tercera componente de } \phi_u \times \phi_v \neq 0$$

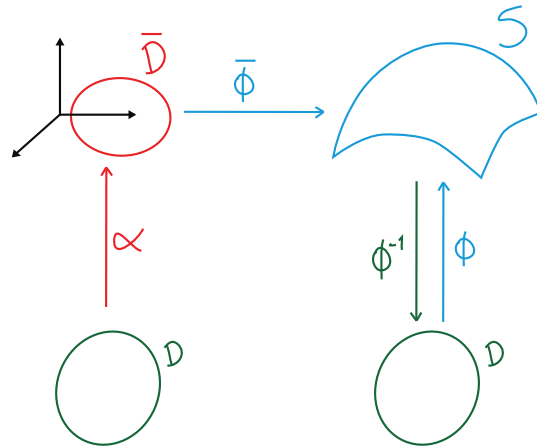
Así que η si es diferenciable, porque ϕ lo es. Pero además $d\eta$ es invertible en $u \times \mathbb{R}$. Por lo tanto (Teorema de la función inversa), existe la función inversa $\eta^{-1} : w \rightarrow u \times \mathbb{R}$

(donde w es el recorrido de η) y además η^{-1} es diferenciable.

Ahora sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$, que evidentemente es diferenciable. Finalmente se observa que ϕ^{-1} es la restricción a v de la compuesta $\pi\eta : w \rightarrow u$. Porque $(\pi\eta^{-1})\phi(r) = \pi\eta^{-1}\eta(r) = \pi(r) = r$ para cada $r \in u$. Como la inversa es única, en efecto $\pi\eta^{-1} = \phi^{-1}$. Pero $\pi\eta^{-1}$ es diferenciable (porque η^{-1} y π lo son) y está definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3. *La función inversa de una carta es la restricción (a la superficie) de una función diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$*

Afirmación 3. *Cada carta puede verse como una función diferenciable (en el sentido de la geometría diferencial).*



$$\overline{D} = D \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3 = \{(x, y, 0) : (x, y) \in D\}$$

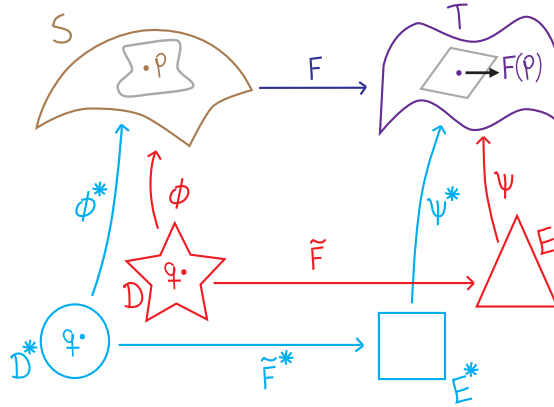
$$\overline{\phi}(u, v, 0) = \phi(u, v)$$

$$\alpha(u, v) = (u, v, 0) \quad \text{así que } \phi = \overline{\phi}\alpha$$

✓. α es carta (es el plano).

✓. $\phi^{-1}\overline{\phi}\alpha$ es diferenciable. Porque $\overline{\phi}\alpha = \phi$, luego $\phi^{-1}\overline{\phi}\alpha = \phi^{-1}\phi = i$ que es diferenciable.

Afirmación 4. *Cada carta es un difeomorfismo (G.D.)*



Porque la inversa es restricción de una función diferenciable en el sentido usual.

Segundo problema:

¿? Si $\psi^{-1}F\phi$ es diferenciable, entonces $\psi^{*-1}F\phi^*$ es diferenciable ¿?

$$\begin{aligned}\tilde{F}^* &= \psi^{*-1}F\phi^* \\ &= \psi^{*-1}\psi^{-1}\tilde{F}\phi\phi^* \\ &= \psi^{*-1}\psi\tilde{F}\phi^{-1}\phi^*\end{aligned}$$

(Porque $\tilde{F} = \psi^{-1}F\phi$ luego $F = \psi\tilde{F}\phi^{-1}$). Ahora $\tilde{F}$ es diferenciable por hipótesis, ψ, ϕ^* son diferenciables por ser cartas; y ψ^{*-1}, ϕ^{-1} son restricciones de funciones diferenciables (definidas en abiertos) luego, $\tilde{F}^*$ es diferenciable.

Teorema 4. *El carácter diferenciable (G.D.) de una función entre superficies no depende de las cartas elegidas.*

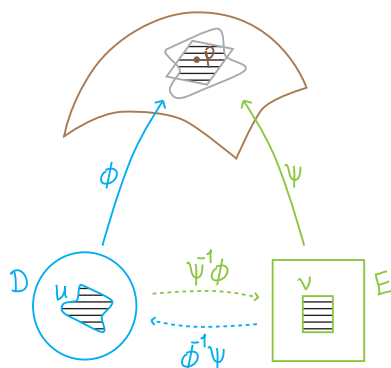
Con la notación del diagrama:

Si $\psi^{-1}F\phi$ es diferenciable (u), entonces $\psi^{*-1}F\phi^*$ también es diferenciable (u).

Afirmación 5. *Sean ϕ, ψ cartas de una misma superficie. La función $\psi^{-1}\phi$ (donde está definida) es un difeomorfismo.*

Sea $w = \phi(D) \cap \psi(E)$, y sean $u = \phi^{-1}(w)$ y $v = \psi^{-1}(w)$, entonces $\psi^{-1}\phi$ está definida en u (y $\phi^{-1}\psi$ en v). Es claro que $\psi^{-1}\phi, \phi^{-1}\psi$ son inversas la una de la otra.

Además son diferenciables: ϕ porque es carta; ψ^{-1} es restricción de una diferenciable (teorema) luego $\psi^{-1}\phi$ es restricción de una diferenciable. pero al estar definida en un abierto, es diferenciable.

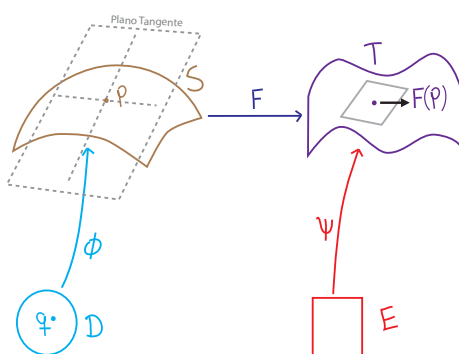


Lo mismo para $\phi^{-1}\psi$.

Esta última afirmación indica cómo es posible definir superficies S sin estructura previa de $\mathbb{R}^3$:

Definición 6 (Abstracta de superficie). Una superficie es un conjunto S con una familia de funciones inyectivas $\phi_i : D_i \rightarrow S$ que la cubren, donde D_i es un dominio abierto conexo de $\mathbb{R}^2$, y además $\phi_j^{-1}\phi_i$ es un difeomorfismo (si está definido).

2.2. Plano tangente

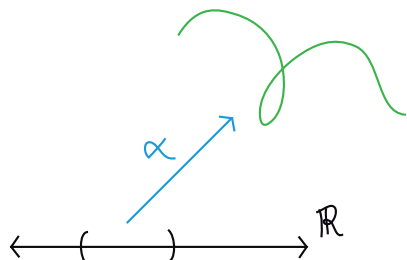


¿Cuál es la derivada?

La mejor transformación lineal que aproxima F .

¿Entre cuáles espacios vectoriales?

2.2.1. Vectores tangentes

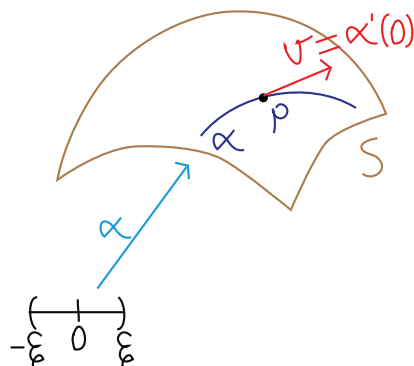
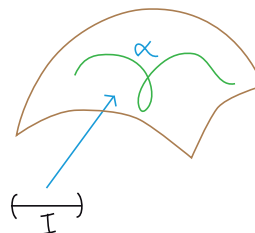


Una curva (diferenciable) es una función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, α es diferenciable (existe la derivada $I \rightarrow \mathbb{R}^3$) y regular (el vector derivada α' no se anula en I).

Ejemplo 5. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$; Hélice

Superficie

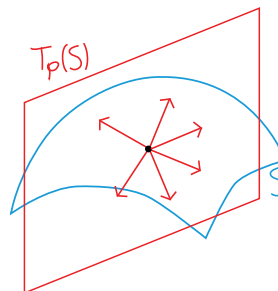
Una curva en S es una curva $\alpha : I \rightarrow S$.



Un vector tangente a S es un vector tangente a alguna curva en S . Con más precisión:

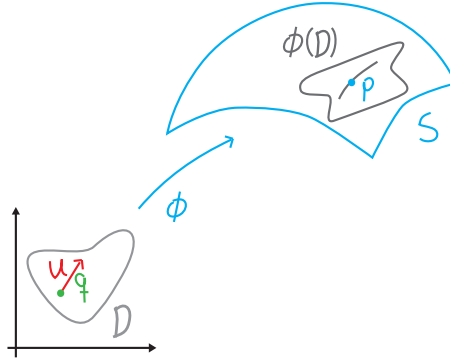
Definición 7. El vector $v \in \mathbb{R}^3$ es tangente a S en el punto $p \in S$ si existe una curva $\alpha : (-\xi, \xi) \rightarrow S$ tal que $v = \alpha'(0)$ y $p = \alpha(0)$.

Definición 8. El plano tangente a la superficie S en el punto p es el conjunto de todos los vectores tangentes a S en p . Se denota $T_p(S)$.



¿? Es plano el plano tangente? ¿?

Sea ϕ una carta de S en el punto p , y sea $q = \phi^{-1}(p)$. Sea $u \in \mathbb{R}^2$, sea $\alpha : (-\xi, \xi) \rightarrow S$ definida como $\alpha(t) = \phi(q + tu)$, se nota que $\alpha(0) = \phi(q) = p$. α es una curva, y además



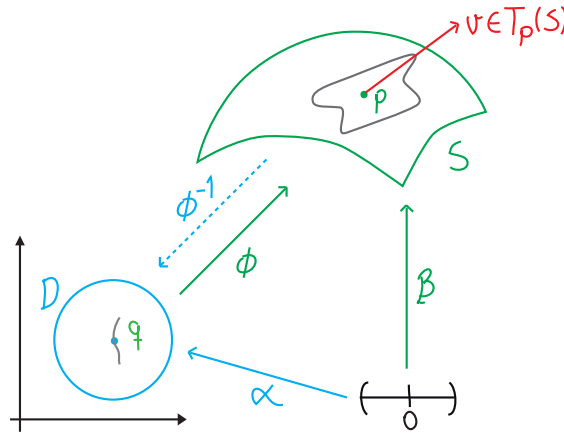
$\alpha'(0) = d\phi_q(u)$ (regla de la cadena), luego $d\phi_q(u)$ es un vector tangente: En particular:

$$d\phi_q(1, 0) = \phi_u$$

$$d\phi_q(0, 1) = \phi_v$$

las dos derivadas parciales son vectores tangentes. Como conclusión parcial, $d\phi_q(\mathbb{R}^2) \subseteq T_p(S)$. Puesto que ϕ es carta, $d\phi_q$ es inyectiva y por lo tanto su imagen $d\phi_q(\mathbb{R}^2)$ es un plano.

¿Y al revés?



Sea $\gamma = \phi^{-1}\beta : (-\xi, \xi) \rightarrow D$, entonces γ es una carta en $\mathbb{R}^2$ porque ϕ^{-1} es la restricción de una función diferenciable, con $\gamma(0) = \phi^{-1}\beta(0) = \phi^{-1}(p) = q$. Ahora $\beta = \phi\gamma$, luego

$$v = \beta'(0) = d\phi_q(\gamma'(0)) \in d\phi_q(\mathbb{R}^2)$$

Teorema 5. para cualquier carta ϕ que cubra a p , se tiene $T_p(S) = d\phi_q(\mathbb{R}^2)$ es decir, el plano tangente a S en p es exactamente el recorrido de la derivada $d\phi_q$.

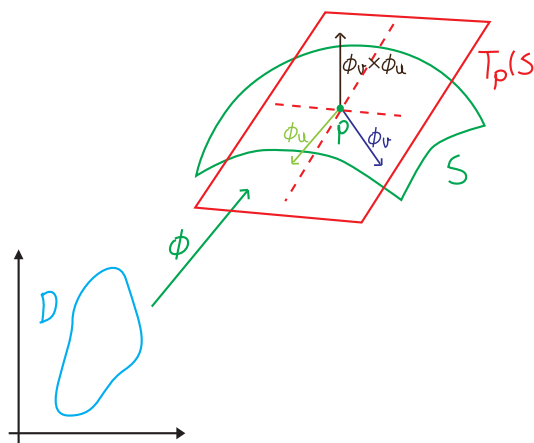
Consecuencias:

- o. Como $d\phi_q$ es inyectiva, el recorrido $d\phi_q(\mathbb{R}^2)$ tiene dimensión 2, es decir, $T_p(S)$ es un plano.
- o. Como $d\phi_q$ es inyectiva, traslada bases. En particular es base de $T_p(S)$:

$$d\phi_q(0, 1) = \frac{\partial \phi}{\partial v} = \phi_v$$

$$d\phi_q(1, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial u} = \phi_u$$

Es decir, los vectores ϕ_u, ϕ_v constituyen una base para el plano tangente $T_p(S)$.

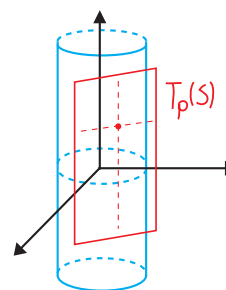


- o. El producto cruz $\phi_u \times \phi_v$ es un vector normal a $T_p(S)$.

Ejemplos 6.

- ✧. Hallar el plano tangente al cilindro $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4, 1)$.

Carta: $\phi(u, v) = (5 \cos u, 5 \sin u, v)$

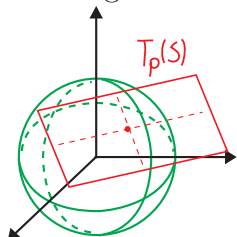


$$q = \phi^{-1}(3, 4, 1) = (\alpha, 1) \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\phi_u \times \phi_v = (5 \cos u, 5 \sin u, 0) \Leftarrow \begin{cases} \phi_u = (-5 \sin u, 5 \cos u, 0) \\ \phi_v = (0, 0, 1) \end{cases}$$

El vector normal en p es $n = (3, 4, 0)$ luego la ecuación (cartesiana) de $T_p(S)$ es $3x + 4y = 9 + 16 + 0$, entonces $3x + 4y = 25$.

✂. El plano tangente a un plano es el mismo plano.



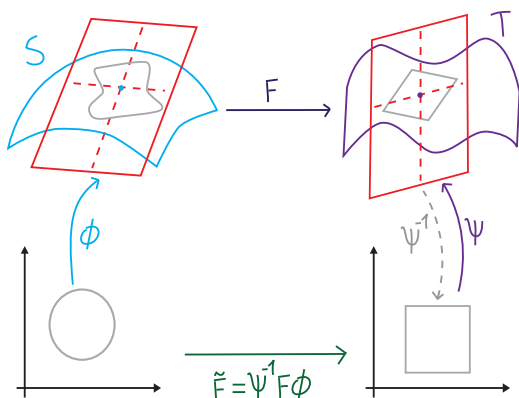
✂. Hallar el plano tangente a la esfera S^2 en el punto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
 Carta: $\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$

$$q = \phi^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 1\right) \Leftarrow \begin{cases} \phi_u = (1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}) \\ \phi_v = (0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}) \end{cases}$$

El vector normal en p es $n = (\frac{1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}, \frac{1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}, 1) = (1, 1, 1)$ luego la ecuación (cartesiana) de $T_p(S)$ es $x + y + z = \frac{3}{\sqrt{3}}$, entonces $x + y + z = \sqrt{3}$.

2.3. Funciones diferenciables entre superficies



✓. F es diferenciable (def) si $\tilde{F}$ lo es.

✓. No depende de ϕ, ψ .

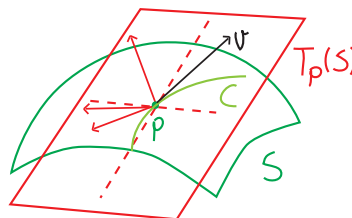
✓. Planos tangentes (esp. vectorial).

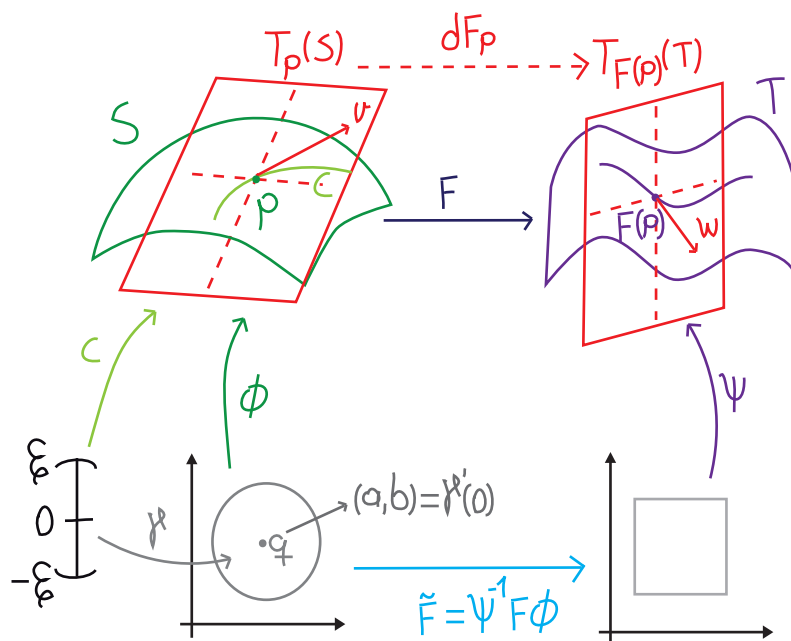
✓. Construcción de la derivada.

¿?Cómo pasar de $T_p(S)$ a $T_{F(p)}(T)$ ¿?

¿?Dado $v \in T_p(S)$, $dF(v) =$ ¿?

Por definición, $v = c'(0)$ donde $c : (-\xi, \xi) \rightarrow S$ es una curva en S con $c(0) = p$.





Componiendo con la función F , aparece una curva $Fc : (-\xi, \xi) \rightarrow T$ con $Fc(0) = F(c(0)) = F(p)$, para el punto $F(p)$. La función Fc también es diferenciable (usual), luego tiene vector tangente $w = (Fc)'(0)$.

Definición 9. Sea $F : S \rightarrow T$ una función diferenciable (G.D.) entre superficies y sea $p \in S$. Se define la función $dF_p : T_p(S) \rightarrow T_{F(p)}(T)$ mediante la correspondencia $v \rightarrow w$ así, dado $v \in T_p(S)$, sea $v = c'(0)$ con $c(0) = p$, entonces $w = (Fc)'(0)$.

¿? Esta función dF_p es lineal ¿?

El camino: Directo, parece difícil. *Otro camino:* usar las bases, es decir las cartas.

Sean ϕ, ψ cartas, una para S en el punto p y la otra para T en el punto $F(p)$ respectivamente, de manera que $\tilde{F} = \psi^{-1} F \phi$ es diferenciable. Ahora se define $\gamma = \phi^{-1}c$, que es una curva en $\mathbb{R}^2$ tal que $c = \phi\gamma$ (obvio: $\phi\gamma = \phi(\phi^{-1}c) = (\phi\phi^{-1})c = c$). Sea $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^2$,

entonces se nota que

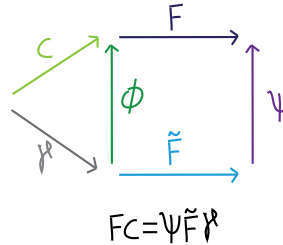
$$\begin{aligned}
 v &= c'(0) = (\phi\gamma)'(0) \\
 &= d\phi_q(\gamma'(0)) \\
 &= \begin{bmatrix} \phi_u & \phi_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 &= a\phi_u + b\phi_v
 \end{aligned}$$

Pero ϕ_u, ϕ_v son una base de $T_p(S)$, luego (a, b) son las componentes del vector v en la base dada por ϕ .

¿? Cuáles son las coordenadas/componentes de w en la base dada por ψ ?

Se nota que $Fc = \psi\tilde{F}\gamma$ (y esto, de paso, garantiza que Fc es diferenciable.)

$$\begin{aligned}
 \psi\tilde{F}\gamma &= \psi(\psi^{-1}F\phi)\gamma \\
 &= (\psi\psi^{-1})F\phi\gamma \\
 &= F\phi\gamma \\
 &= Fc
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Luego: } w &= (Fc)'(0) \\
 &= (\psi\tilde{F}\gamma)'(0) \\
 &= d\psi d\tilde{F}\gamma'(0) \\
 &= \begin{bmatrix} \psi_s & \psi_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \psi_s & \psi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} as_u + bs_v \\ at_u + bt_v \end{bmatrix} \\
 &= (as_u + bs_v)\psi_s + (at_u + bt_v)\psi_t
 \end{aligned}$$

las coordenadas de $w = dF_p(v)$ en la base por ψ son $(as_u + bs_v, at_u + bt_v)$

Presentación:

$$\begin{array}{ccc}
 v \rightarrow w & & \\
 \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right]_{\phi} & \rightarrow & \left(\left[\begin{array}{cc} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] \right)_{\psi} \\
 \text{En la base } \phi & & \text{En la base } \psi
 \end{array}$$

Como la matriz $\begin{pmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{pmatrix}$ es fija, la asignación $v \rightarrow w$ es lineal.

Teorema 6. *La función dF_p definida antes es una transformación lineal. La matriz de esta transformación lineal en las bases dadas por cartas ϕ, ψ respectivamente, es la matriz de la derivada de*

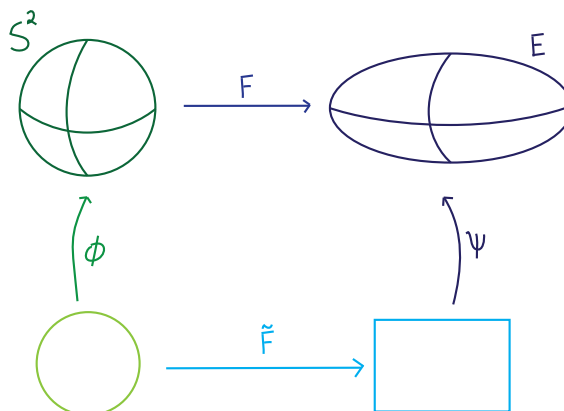
$$\tilde{F} = \psi^{-1} F \phi$$

Definición 10. dF_p es la derivada (diferencial) de F en p .

En superficies se ha logrado recuperar que la derivada es una transformación lineal (entre los planos tangentes) que aproxima la función (pues la función traslada los vectores tangentes). La matriz es la derivada (la jacobiana) de $\tilde{F}$.

Ejemplos 7.

1. S^2 la esfera unidad, $E =$ Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



$F(x, y, z) = (ax, by, cz)$ y ϕ, ψ cartas esféricas:

$$\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

$$\psi(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$$

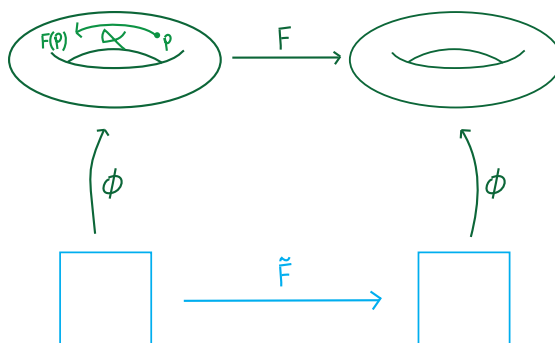
con estas cartas $F\phi = \psi$, luego $\tilde{F} = \psi^{-1}F\phi = \psi^{-1}\psi = \text{idéntica}$, entonces:

$$\tilde{F}(u, v) = (u, v)$$

$$d\tilde{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

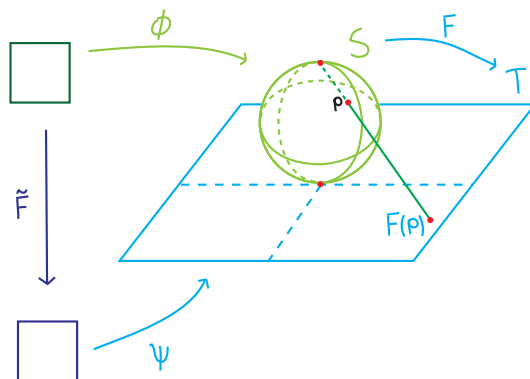
2. Rotación en el Toro. F es la rotación de un ángulo alrededor del eje z “vertical”.

$\phi(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$. Ahora $\tilde{F}$ aumenta v en α :



$$\tilde{F}(u, v) = (u, v + \alpha) \text{ la derivada, de nuevo, es } dF_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Proyección estereográfica.



$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}, 0\right)$. Se proponen las cartas:

$$\begin{aligned}\phi(u, v) &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \\ \psi(u, v) &= (u, v, 0), \quad \psi^{-1}(x, y, 0) = (x, y)\end{aligned}$$

En estas condiciones

$$\tilde{F}(u, v) = \left(\frac{2 \cos u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{2 \sin u \cos v}{1 - \sin v}\right)$$

¿Cuál es la derivada de F ?

En las bases dadas por ϕ y ψ , es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2 \sin u \cos v}{1 - \sin v} & \frac{2 \cos u}{1 - \sin v} \\ \frac{2 \cos u \cos v}{1 - \sin v} & \frac{2 \sin u}{1 - \sin v} \end{bmatrix} = \frac{2}{1 - \sin v} \begin{pmatrix} \sin u \cos v & \cos u \\ \cos u \cos v & \sin u \end{pmatrix}$$

¿Es invertible F ?

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{2 \sin u \cos v}{1 - \sin v} & \frac{2 \cos u}{1 - \sin v} \\ \frac{2 \cos u \cos v}{1 - \sin v} & \frac{2 \sin u}{1 - \sin v} \end{bmatrix} = -\sin^2 u \cos v - \cos^2 u \cos v = -\cos v \neq 0$$

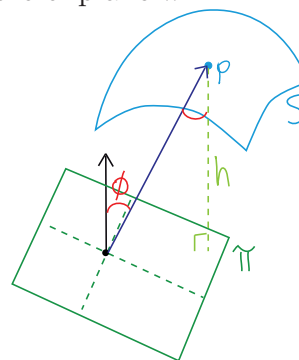
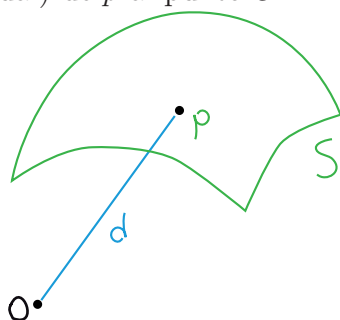
Por $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Así que es invertible.

Con este resultado, también son válidos los resultados:

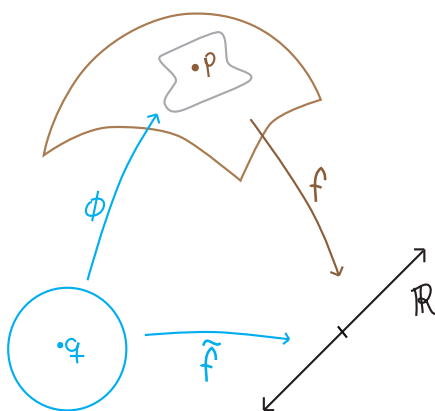
- ✓. Regla de la cadena.
- ✓. Teorema de la función inversa.
- ✓. Etcétera

Ejemplos 8.

1. Sea S una superficie y O un punto fijo. Para cada $p \in S$ se define $d(p)$ como la “distancia” (euclidiana=usual) de p al punto O .
2. Sea S una superficie y π un plano fijo. Para cada $p \in S$ se define $h(p)$ como la altura (euclidiana=usual) de p sobre el plano π .

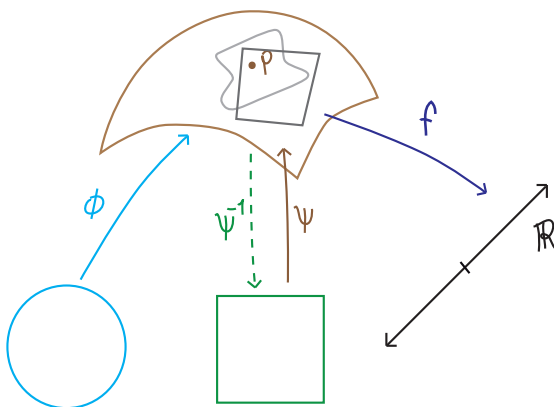


Se puede suponer que π pasa por el origen si n es un vector unitario normal al plano π , entonces $h = \|p\| \cos \phi = \|n\| \|p\| \cos \phi = n \cdot p$ así que $h(p) = n \cdot p$

Esquema:

Definición 12. La “funcional” $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $p \in S$ si la función compuesta $\tilde{f} = f \circ \phi$ es diferenciable (en el sentido usual), siendo ϕ una carta que cubre a p .

Afirmación 6. Esta noción no depende de la carta ϕ



Demostración. Si ψ es otra carta que cubre a p , la compuesta $\psi^{-1}\phi$ es difeomorfismo (usual). Si $f\psi$ es diferenciable (usual) entonces $(f\psi)(\psi^{-1}\phi)$ también. Pero $f\psi\psi^{-1}\phi = f\phi$, luego también $f\phi$ es diferenciable.

Si $n = (a, b, c)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(u, v) &= (h\phi)(u, v) \\
 &= h(\phi(u, v)) \\
 &= h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\
 &= (a, b, c) \cdot (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\
 &= ax(u, v) + by(u, v) + cz(u, v)
 \end{aligned}$$

En este caso

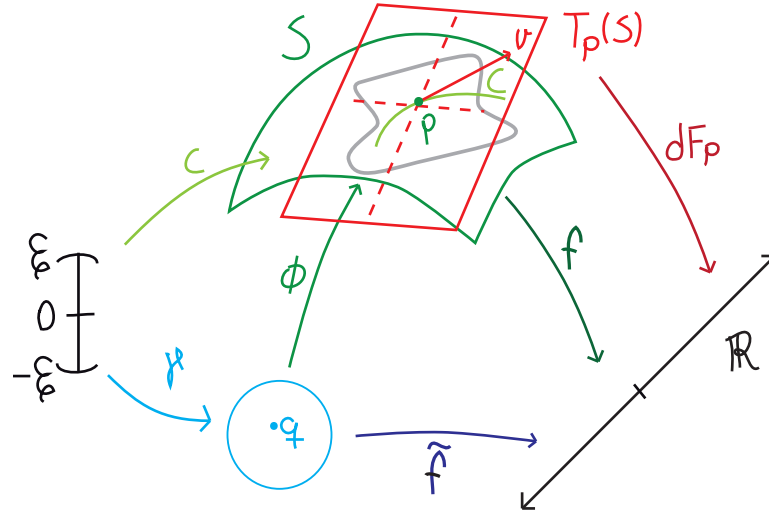
$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_u &= a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial y}{\partial u} + c \frac{\partial z}{\partial u} \\
 &= (a, b, c) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\
 &= (a, b, c) \cdot \phi_u
 \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $\tilde{h}_v = n \cdot \phi_v$.

◇

¿?Cuál es la derivada/diferencial de una funcional¿?

Una transformación lineal de $T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional de $T_p(S)$ un elemento del espacio dual $T_p(S)^*$



Dado $v \in T_p(S)$ “existe” una curva $c : (-\xi, \xi) \rightarrow S$ con $c(0) = p$ y $c'(0) = v$. Al vector $v \in T_p(S)$ se asigna el escalar $w = df_p(v) \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$w = (fc)'(0)$$

Se nota que $fc : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

¿? La función $df_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal ¿?

Sean $\phi : D \rightarrow S$ una carta en p y $\gamma : (-\xi, \xi) \rightarrow D$ con $\phi\gamma = c$ (existe) una carta. En estos términos $fc = f\phi\gamma = \tilde{f}\gamma$, luego

$$w = (fc)'(0) = (\tilde{f}\gamma)'(0) = (\tilde{f}_u, \tilde{f}_v)\gamma'(0) = (\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

donde (a, b) son las coordenadas de v en la base ϕ . De esta manera

$$v \mapsto^{df_p} w$$

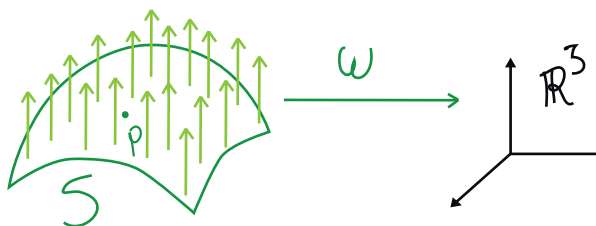
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{\phi} \mapsto (\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Luego la derivada df_p es lineal y además su matriz en la base diferencial por ϕ es $(\tilde{f}_u, \tilde{f}_v)$.

Ejemplo 6. En la función altura $h(p)$, la transformación lineal dh_p tiene como matriz la base dada por ϕ la fila $(n \cdot \phi_u, n \cdot \phi_v)$

2.5. Campos Vectoriales

Definición 13. Un campo vectorial en la superficie S es una función $w : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

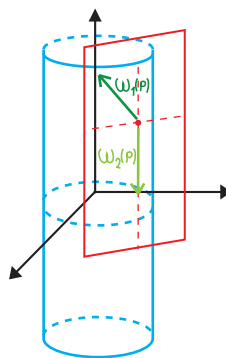


Idea sugestiva: dibujar $w(p)$ en el punto p tales “Campos” proviene de estudios en la Física.

Terminología:

- w es un campo “Ortogonal” si $w(p) \perp T_p(S)$ en cada punto $p \in S$.
- w es un campo “tangente” si $w(p) \in T_p(S)$ cada p .

Ejemplo 7. En el cilindro. $x^2 + y^2 = 1$, $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$



a. $w_1(p)$ =vector de p hacia el eje z . En la carta ϕ , $w_1(p) = (-\cos u, -\sin v, 0)$

¿?De veras es Ortogonal ¿?

$$\phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\phi_v = (0, 0, 1)$$

$$w_1(p) \cdot \phi_u = (-\cos u, -\sin v, 0) \cdot (-\sin u, \cos u, 0) = 0$$

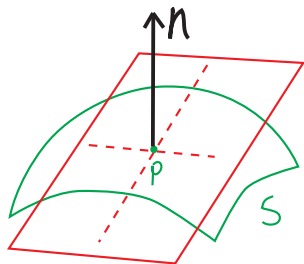
$$w_1(p) \cdot \phi_v = (-\cos u, -\sin v, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

b. $w_2(p)$ = vector de p paralelo al eje z .

¿Es tangente ¿?

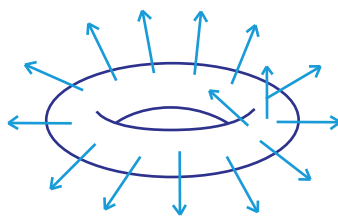
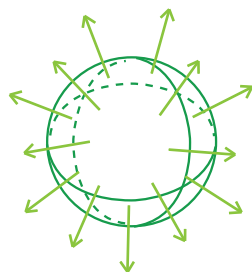
$$w_2(p) = \lambda(p) \cdot \phi_v \quad \lambda(p) \text{ escalar}$$

En cualquier superficie S .

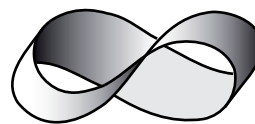


Sea $n = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$ este es un campo vectorial ortogonal, que a cada punto p asigna un vector normal unitario, perpendicular a S . Salvo el signo, este vector normal es único.

Una superficie es orientable si existe un campo normal unitario que no cambia de signo en toda la superficie.



Orientables



No orientable

Para los asustes de diferenciabilidad, es posible considerar la función w como la restricción a S de una función diferenciable $u \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida en un abierto $u \supseteq S$.

Ejemplo 8. En el cilindro:

a. $w_1(p)$, restricción de $\alpha_1(x, y, z) = (-x, -y, 0)$.

b. $w_2(p)$, restricción de $\alpha_2(x, y, z) = (0, 0, \lambda)$.

2.6. Formas diferenciables

Definición 14. Sea S una superficie.

- ♠. Una 0-forma (cero-forma) es una funcional, una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Correspondencia que a cada $p \in S$ asigna una transformación lineal

$$[T_p(S)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

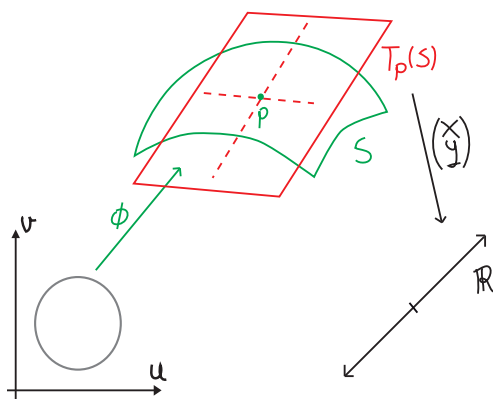
Se pide que sea diferenciable.

- ♠. Una 1-forma es una función que a cada punto $p \in S$ asigna una transformación lineal

$$\alpha : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

Idea: medir vectores.

Como $\dim(T_p(S)) = 2$, pues es un plano, α está dada por una matriz 2×1 , $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. α será diferenciable en el sentido de que las componentes x, y lo son. Como todo depende del punto p , entonces x, y son funciones de u, v



- ♠. Una 2-forma es una función, que a cada punto $p \in S$ asigna una función bilineal anti simétrica $w : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$.

Bilineal: $w(u, v)$ es lineal en cada argumento:

$$\text{Lin1} \begin{cases} w(u_1 + u_2, v) = w(u_1, v) + w(u_2, v) \\ w(\lambda u, v) = \lambda w(u, v) \end{cases} \quad \text{Lin2} \begin{cases} w(u, v_1 + v_2) = w(u, v_1) + w(u, v_2) \\ w(u, \lambda v) = \lambda w(u, v) \end{cases}$$

Anti simétrica $w(u, v) = -w(v, u)$

Corolario 1. $w(u, v) = -w(v, u)$ en $\mathbb{R}$ luego $w(v, v) = 0$.

[] 1. ALGEBRA LINEAL: En general

Si $\dim(V) = n$, las funciones bilineales $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por matrices $n \times n$.

Dada $M = (m_{ij})_{n \times n}$, se define

$$m(u, v) = uv^t = (a_1, \dots, a_n)_B \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

que evidentemente es lineal.

Al revés, dada φ una función bilateral, sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base, entonces $m_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ de la matriz $M_{n \times n}$.

- ▷. La función bilineal φ es simétrica si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$, si y solo si la matriz M es simétrica ($M^t = M$).
- ▷. La función bilineal φ es anti simétrica si $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$, si y solo si la matriz M es anti simétrica $M^t = -M$.
- ▷. Cualquier bilineal es suma de una simétrica y una anti simétrica.

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \frac{1}{2} (\varphi(u, v) + \varphi(v, u)) + \frac{1}{2} (\varphi(u, v) - \varphi(v, u)) \\ M &= \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^t)}_{\text{simetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^t)}_{\text{antisimetrica}} \end{aligned}$$

Retomando 2-forma: Como $\dim(T_p(S)) = 2$, w está dado por una matriz 2×2 anti simétrica.

$$w = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$

w será diferenciable, en el sentido de que la componente x lo es (es función de u y v).

2.6.1. Dos métodos de construcción

Producto Exterior

Si β_k y γ_l son formas, su producto exterior se denota $\beta \wedge \gamma_{k+l}$ y se define por casos así:

- ◊. Si f es 0-forma y α es 1-forma, $f \wedge \alpha$ es la 1-forma definida como $(f \wedge \alpha)(v) = f(p) \cdot \alpha(v)$.
- ◊. Si f es 0-forma y ω es 2-forma, $f \wedge \omega$ es la 2-forma definida como $(f \wedge \omega)(u, v) = f(p) \cdot \omega(u, v)$.
- ◊. Si α, β son 1-forma, $\alpha \wedge \beta$ es la 2-forma definida como

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u)$$

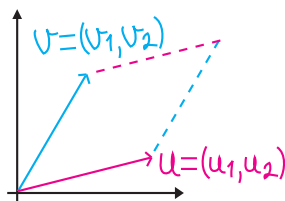
(Recuerde que $\alpha(u), \beta(v)$ son números reales)

Es bilineal y anti simétrica $(\alpha \wedge \beta)(u, v) = -(\beta \wedge \alpha)(u, v)$.

Ejemplo 9. $T_p(S)$ es $\mathbb{R}^2$ (por ejemplo si S es el plano) dx es la proyección en x : $dx(x, y) = x$, $dx : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ entonces dx es una 1-forma. dy es la proyección en y : $dy(x, y) = y$

¿?Qué es $dx \wedge dy$ ¿?

$$\begin{aligned} (dx \wedge dy)(u, v) &= dx(u)dy(v) - dx(v)dy(u) \\ &= u_1v_2 - v_1u_2 \end{aligned}$$



$$\text{En } \mathbb{R}^3 : \quad u = (u_1, u_2, 0)$$

$$v = (v_1, v_2, 0)$$

$$u \times v = (0, 0, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

$$\|u \times v\| = |u_1 v_2 - v_1 u_2|$$

$$\text{Área del paralelogramo dado por } u \text{ y } v = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

Derivada Exterior

En general, si d es una k -forma, entonces su derivada exterior $d^e \alpha$ es $(k+1)$ forma. f es 0-forma $\dots$ $d^e f$ es 1-forma. α es 1-forma $\dots$ $d^e \alpha$ es 2-forma.

- ◊. Si f es 0-forma (función diferenciable $S \rightarrow \mathbb{R}$), $d^e f$ es lo diferencial df : a cada punto p asigna la transformación lineal $df_p : T_p(S) \rightarrow S$.
- ◊. La derivada exterior $d^e f$ de una 1-forma α es la parte anti simétrica de la diferencial $d\alpha$.

Sentido:

$$P \mapsto^\alpha (T_p(S) \rightarrow^{dp} \mathbb{R})$$

Dada una carta ϕ que cubre a p , x, y son funciones diferenciable de u y v . En cierto modo, α es función de dos variables y dos valores:

$$\alpha = (u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{Entonces } d\alpha = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$$

En general, la parte anti simétrica de M es $\frac{1}{2}(M - M^t)$. Así que $d\alpha$ está dada por:

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & y_u - x_v \\ x_v - y_u & 0 \end{pmatrix}$$

(En la base dada por α)

¿Qué sucede con $f \rightarrow d^e f \rightarrow d^e d^e f$ ¿?

Si $d^e f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_u \\ \tilde{f}_v \end{pmatrix}$ entonces $d^e d^e f$ está dada por

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{f}_{vu} - \tilde{f}_{uv} \\ \tilde{f}_{uv} - \tilde{f}_{vu} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2 \times 2$$

Porque $\tilde{f}_{vu} = \tilde{f}_{uv}$ (al ser diferenciable en el sentido usual).

Afirmación 7. Para cualquier 0-forma f se tiene $d^e d^e f = 0$.

En el plano. dx =proyección en x y dy =proyección en y , donde dx, dy son 1-formas.

Sea α cualquier 1-forma

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \alpha(v_1, v_2) = \alpha(v_1, 0) + \alpha(0, v_2) \\ &= v_1 \alpha(1, 0) + v_2 \alpha(0, 1) \\ &= f v_1 + g v_2 \\ &= f dx(v_1, v_2) + g dy(v_1, v_2) \\ &= (f dx + g dy)(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Así $\alpha = f dx + g dy$. En este caso, toda 1-forma α tiene la forma $\alpha = f dx + g dy$ con f, g 0-formas.

Sea ω cualquier 2-forma.

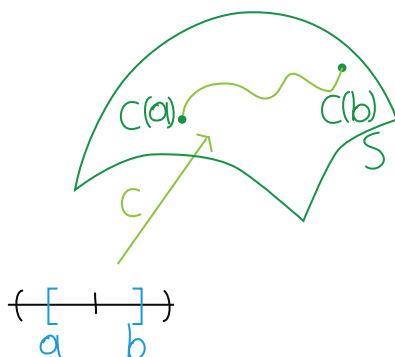
$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= \omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\ &= \omega(u_1(1, 0) + u_2(0, 1), v) \\ &= u_1 \omega((1, 0), v) + u_2 \omega((0, 1), v) \\ &= u_1 \omega((1, 0), v_1(1, 0) + v_2(0, 1)) + u_2 \omega((0, 1), v_1(1, 0) + v_2(0, 1)) \\ &= u_1 v_1 \omega((1, 0), (1, 0)) + u_1 v_2 \omega((1, 0), (0, 1)) + u_2 v_1 \omega((0, 1), (1, 0)) + u_2 v_2 \omega((0, 1), (0, 1)) \\ &= u_1 v_2 \omega((1, 0), (0, 1)) - v_1 u_2 \omega((1, 0), (0, 1)) \\ &= h(u_1 v_2 - v_1 u_2) \\ &= h dx \wedge dy(u, v) \end{aligned}$$

Así $\omega = hdx \wedge dy$. En este caso, toda 2-forma tiene la forma $\omega = hdx \wedge dy$ con h 0-forma.

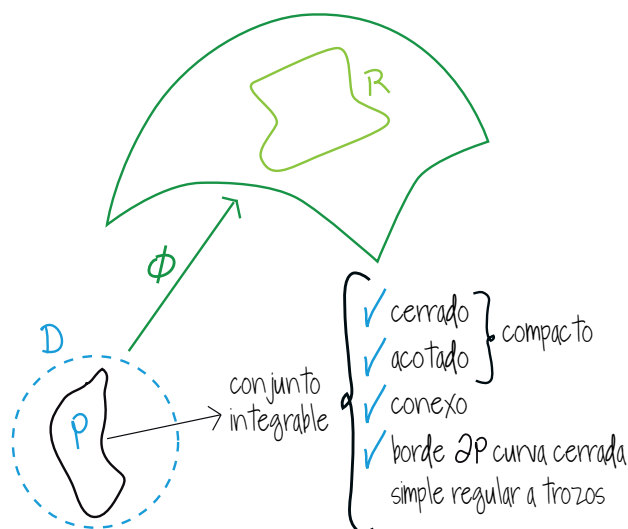
2.7. Cálculo Integral en superficies

Motivación: Dos tipos de integrales (como en $\mathbb{R}^2$) línea y dobles.

Caminos y regiones en S : Un camino es un segmento de curva: si $c : (r, s) \rightarrow S$ es una curva (diferenciable, inyectiva, etc.) entonces la imagen $c[a, b]$ se denomina camino donde $[a, b] \subseteq (r, s)$.



Una región simple R es la imagen por una carta φ de un conjunto P cerrado acotado, conexo cuyo borde ∂P es una curva cerrada simple regular a trazos. (En pocas palabras: P es integrable en $\mathbb{R}^2$)



Motivación: Integrables

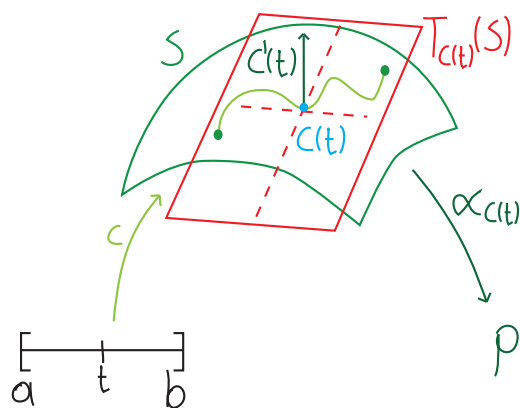
Línea — Caminos — 1-formas

Dobles — Regiones — 2-formas

Definición 15. La integral de línea de una 1-forma α definida en S a lo largo de un camino $C = c[a, b]$ es

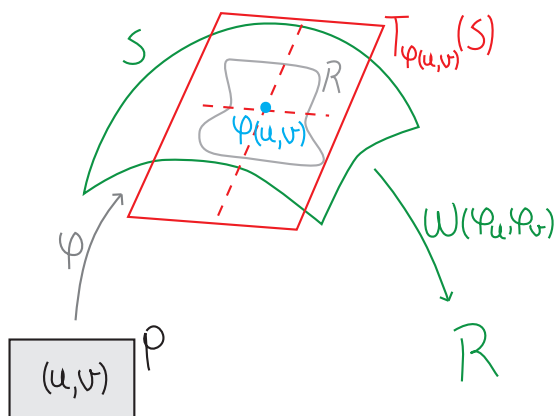
$$\int_C \alpha = \int_a^b \alpha(c'(t)) dt \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Nota 4. En realidad es $\alpha_{C(t)}(C'(t))$ donde, como se recuerda, $\alpha_{C(t)} : T_{C(t)}(S) \rightarrow \mathbb{R}$.



Definición 16. La integral de superficie de una 2-forma ω definida en S sobre una región $R = \varphi(p)$ es

$$\int \int_R \omega = \int \int_P \omega(\varphi_u, \varphi_v) du dv \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$



¿?El valor de la integral depende de las cartas / curvas ¿?

Supóngase que también $C = k[e, f]$ para alguna otra función adecuada k por definición:

$$\begin{aligned}\int_e^f \alpha(k'(s))ds &= \int_a^b \alpha(C'(t)) \left| \frac{dt}{ds} \right| ds \\ &= \pm \int_a^b \alpha(C'(t)) \frac{dt}{ds} ds \\ &= \pm \int_a^b \alpha(C'(t)) dt\end{aligned}$$

Así, la integral por k es $\int_C \alpha$ o bien $-\int_C \alpha$ y el cambio de variable afecta a lo más el signo.

Supóngase que también $R = \psi(Q)$ para una carta ψ y una región adecuada Q . Por definición y cambio de variable:

$$\begin{aligned}\int \int_Q \omega(\psi_x, \psi_y) dx dy &= \int \int_P \omega(\psi_u, \psi_v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \\ &= \pm \int \int_P \omega(\psi_u, \psi_v) du dv \\ &= \pm \int \int_R \omega\end{aligned}$$

De nuevo, la integral por ψ es o bien $\int \int_R \omega$ o bien $-\int \int_R \omega$ y el cambio de variable afecta a lo más un signo.

Motivación: El teorema fundamental del cálculo. Relación general entre derivadas e integrales.

• **Básico:** $\int_I dF = \int_{\partial I} F$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

F es anti derivada de f

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b F'(t)dt = F/\partial I$$

$$\int_I F' = F/\partial I$$

$$\int_I dF = F/\partial I$$

• **Dos variables:** Teorema de Green

$$\int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C Pdx + Qdy$$

$$\int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial R} Pdx + Qdy$$

$$\int_R d(P, Q) = \int_{\partial R} (P, Q)$$

$$\int_R dF = \int_{\partial R} F$$

• **Tres variables:** Teorema de _____

$$\int_S dF = \int_{\partial S} F$$

Todos son representaciones de un mismo fenómeno:

La integral sobre una región de una diferencial ES La integral sobre el borde de la función $\Leftrightarrow$

Teorema 7. *TEOREMA DE STOKES[En dos versiones]*

1. Sea F una 0-forma. si $c = C[A, B]$ es un camino entonces

$$\int_C df = f(C(t)) \Big|_a^b$$

2. Sea α 1-forma. Si $R = \varphi(P)$ es una región entonces

$$\int \int_R d\alpha = \int_{\partial R} \alpha$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_c df &= \int_a^b df(C'(t))dt \\ &= \int_a^b (fC)'(t)dt \\ &= f(c(t))|_a^b \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \int_R d\alpha &= \int \int_P d\alpha(\varphi_u, \varphi_v) du dv \\ &= \int \int_P \left[\frac{\partial}{\partial u} \alpha(\varphi_u) - \frac{\partial}{\partial v} \alpha(\varphi_v) \right] du dv \\ &= \int_{\partial P} (\alpha(\varphi_u) du + \alpha(\varphi_v) dv) \\ &= \int_a^b \alpha(C'(t)) dt \\ &= \int_{\partial R} \alpha \end{aligned}$$

◇

2.8. Ejercicios

1. Sea S el toro con radio mayor $R = 2$ y radio menor $r = 1$. Encuentre el plano tangente a S en el punto $(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
2. Sea $S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ la superficie de Monge asociada a una función diferenciable $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Encuentre el plano tangente a la superficie para un punto arbitrario $(a, b) \in D$.
3. Sea $S_d = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = d\}$ la superficie de nivel asociada a un valor regular d de la función diferenciable $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Encuentre el plano tangente a la superficie en un punto arbitrario $(a, b, c) \in S_d$.

4. Sea $S = S^2 - \{n, s\}$ la esfera unitaria centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$ a la cual se le han removido los polos norte $n = (0, 0, 1)$ y sur $s = (0, 0, -1)$; por otro lado, sea C el cilindro circular recto levantado sobre la circunferencia unitaria del plano xy centrada en el mismo origen, de tal suerte que $S \cap C$ es el ecuador de la esfera.
- a) Dibuje la situación.
- b) Defina $F : S \longrightarrow C$ diciendo que $F(p)$, $p \in S$, es el punto donde la semirrecta ortogonal al eje z que pasa por p corta al cilindro C .
- c) Encuentre la forma matricial de la derivada dF_p , $p \in S$, cuando se usa una carta esférica para S y una cilíndrica para C .
5. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$, sea O un punto del espacio que no está en S y sea $d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ a la función que asigna a cada $p \in S$ la distancia euclidiana (recta) de O a p . Muestre que la función d^2 es diferenciable.

CAPÍTULO 3

Geometría en superficies

3.1. Primera forma fundamental

Definición 17. S es una superficie. La Primera Forma Fundamental P.F.F. es la correspondencia que a cada punto $p \in S$ asigna una forma bilineal simétrica definida positiva, a saber, la restricción a $T_p(S)$ del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Se denota:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

Dados $u, v \in T_p(S) \times T_p(S)$, $\langle u, v \rangle_p \in \mathbb{R}$.

En general, un producto de estas características en un espacio vectorial de dimensión n está dado por una matriz $n \times n$ (simétrica y definida positiva).

$$u \cdot v = (u_1, \dots, u_n) \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Si es el producto usual en $\mathbb{R}^n$ y se usa la base usual, la matriz es la idéntica y

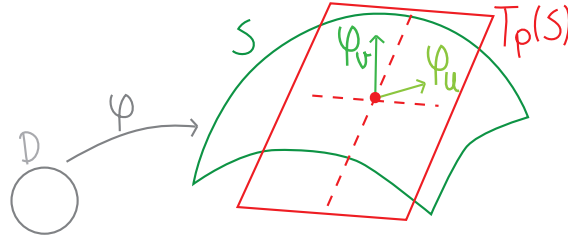
$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 \longrightarrow u_nv_n$$

¿?Cuál es la matriz de la PFF en la base dada por una carta ¿?

Sean $u, v \in T_p(S)$. Entonces existen escalares a, b, c, d tales que

$$v = (a, b)_\varphi = a\varphi_u + b\varphi_v$$

$$w = (c, d)_\varphi = c\varphi_u + d\varphi_v$$



$$\begin{aligned}
 \langle v, w \rangle_p &= \langle a\varphi_u + b\varphi_v, c\varphi_u + d\varphi_v \rangle \\
 &= ac\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + ad\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + bc\langle \varphi_v, \varphi_u \rangle + bd\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\
 &= (a, b)_\varphi \begin{bmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}_\varphi
 \end{aligned}$$

La P.F.F. , está dada, en la base de φ , completamente por las tres escalares

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\
 F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle \\
 G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle
 \end{aligned}$$

Que se designan por las letras E, F, G y se denominan coeficientes métricos (gaussianos) de la superficie.

Nota 5. ✖. En realidad, E, F, G son funciones y son diferenciables de u y v .

✖. Así, la matriz de la primera forma fundamentales en la base dada por φ es

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Ejemplos 9.

♠. El plano: $\varphi(s, t) = s\alpha + t\beta$, donde sus derivadas parciales son: $\varphi_s = \alpha$ y $\varphi_t = \beta$ entonces sus coeficientes métricos son

$$E = \alpha \cdot \alpha, \quad F = \alpha \cdot \beta, \quad G = \beta \cdot \beta$$

♠. La esfera: $\psi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, donde sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}\psi_u &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0), \\ \psi_v &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)\end{aligned}$$

Ahora bien sus coeficientes gaussianos son:

$$\begin{aligned}E &= \psi_u \cdot \psi_u & G &= \psi_v \cdot \psi_v \\ &= \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u & &= \cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u = 1 & &= \cos^2 u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \psi_u \cdot \psi_v \\ &= \sin u \cos u \sin v \cos v - \sin u \cos u \sin v \cos v \\ &= 0\end{aligned}$$

La primera forma fundamental P.F.F. en la esfera con esta base tiene como matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{bmatrix}$$

♠. El cilindro: $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ y sus derivadas parciales son:

$$\phi_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \phi_v = (0, 0, 1)$$

Por tanto, sus coeficientes gaussianos están dados por:

$$\begin{aligned}E &= \phi_u \cdot \phi_u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, & F &= \phi_u \cdot \phi_v = 0, \\ G &= \phi_v \cdot \phi_v = 1\end{aligned}$$

La matriz de la primera forma fundamental P.F.F. es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota 6. Para esta carta la P.F.F. es el producto escalar usual.

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle_\phi = ac + bd$$

- ♠. Carta de Monge: $\psi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ calculando sus derivadas parciales obtenemos

$$\psi_u = (1, 0, f_u), \quad \psi_v = (0, 1, f_v)$$

y sus coeficientes métricos son:

$$E = \psi_u \cdot \psi_u = 1 + (f_u)^2, \quad F = \psi_u \cdot \psi_v = f_u f_v, \quad G = \psi_v \cdot \psi_v = 1 + (f_v)^2$$

- ♠. El toro: $\phi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$, las derivadas parciales son:

$$\phi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \quad \phi_v = (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0)$$

Los coeficientes métricos:

$$E = \phi_u \cdot \phi_u = \sin^2 u \cos^2 v r^2 + \sin^2 u \sin^2 v r^2 + \cos^2 u r^2 = r^2$$

$$F = \phi_u \cdot \phi_v = r(R + r \cos u)(-\sin u \sin v \cos v + \sin u \sin v \cos v) = 0$$

$$G = \phi_v \cdot \phi_v = (R + r \cos u)^2 (\sin^2 v + \cos^2 v) = (R + r \cos u)^2$$

La P.F.F. del toro, en esta base, tiene matriz

$$\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos u)^2 \end{bmatrix}$$

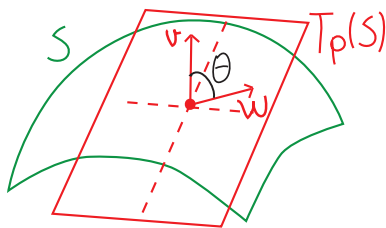
Para cualquier vector tangente $v \in T_p(S)$, $\|v\|_p$ denota su norma para la P.F.F., es decir $\|v\|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}$. En particular, entonces $\|\varphi_u\|_p = \sqrt{E}$ y $\|\varphi_v\|_p = \sqrt{G}$

3.2. Ángulo, longitud de arco y área

El Ángulo entre dos vectores $v, w \in T_p(S)$ está definido por

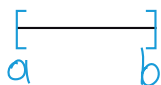
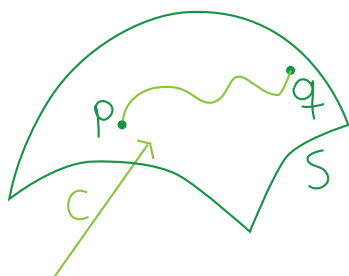
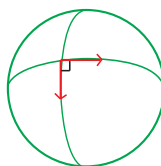
$$\theta = \arccos \left\langle \frac{u}{\|u\|_p}, \frac{v}{\|v\|_p} \right\rangle_p$$

Esto permite definir el ángulo entre dos curvas como el ángulo entre vectores tangentes



en el punto de intersección.

Ejemplo 10. En la esfera, meridianos y paralelos siempre son ortogonales.



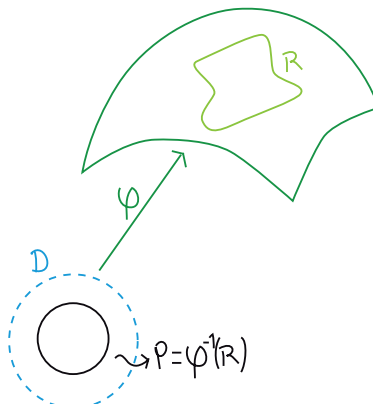
Para medir distancias sobre la superficie, se usan caminos que unan los puntos considerados. Si $C : [a, b] \rightarrow S$ es una curva rectificable entonces se define la función Longitud de Arco como:

$$l(t) = \int_a^t \|C'(S)\| dS$$

Se nota que $C'(S) \in T_r(S)$ para algún $r \in S$.

Sea $R \subseteq S$ una región de la superficie tal que para cierta carta φ , el conjunto $\varphi^{-1}(R) = p$ es integrable. El Área de R es:

$$A(R) = \int \int_p \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$



Esto se justifica porque en general la norma del producto cruz de dos vectores es igual al área del paralelogramo que ellos determinan en el espacio.

Por la identidad de lagrange,

$$\begin{aligned}\|v \times w\|^2 &= \|v\|^2\|w\|^2 - \langle u, w \rangle^2 \\ \|v \times w\|^2 + \langle u, w \rangle^2 &= \|v\|^2\|w\|^2 \cos^2 \theta + \|v\|^2\|w\|^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2\end{aligned}$$

Luego el área es:

$$A(R) = \int \int_p \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Ejemplos 10.

♣. Plano

$$\begin{aligned}A(R) &= \int \int_p \|\alpha \times \beta\| du dv \\ &= \|\alpha \times \beta\| \int \int_p du dv \\ &= \|\alpha \times \beta\| A(p)\end{aligned}$$

♣. Esfera

$$\begin{aligned}A(R) &= \int \int_p \sqrt{\cos^2 u} du dv \\ &= \int \int_p \cos u du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u du dv \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u du \\ &= 2\pi \sin u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi[1 - (-1)] = 4\pi\end{aligned}$$

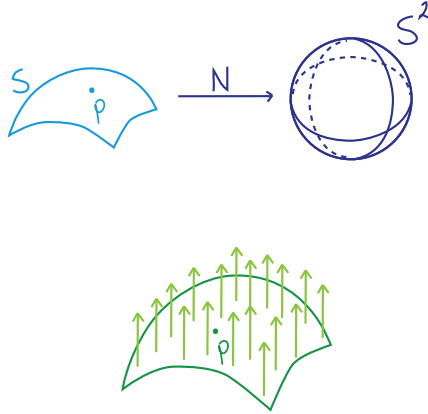
♣. Cilindro

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int \int_p \sqrt{EG - F^2} du dv \\
&= \int \int_p du dv \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} du dv \\
&= 2\pi h
\end{aligned}$$

Área de un cilindro de radio 1 y altura h .

3.3. Función de Gauss

Definición 18. S es una superficie. Una función de Gauss es una campo vectorial normal unitario $N : u \subseteq S \rightarrow S^2$, u abierto en S , diferenciable en u (en el sentido de la geometría diferencial). S^2 denota la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. Dos presentaciones:



Aquí “normal unitario” significa que para cada $p \in S$, $N(p)$ es ortogonal al plano tangente $T_p(S)$ y que $\|N(p)\| = 1$.

Por lo menos hay dos conocidas: Dada una carta φ , los vectores tangentes φ_u, φ_v constituyen una base del plano $T_p(S)$, luego $\varphi_u \times \varphi_v$ es normal al plano luego sirve como funciones normales:

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}, \quad N(p) = -\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|},$$

En adelante, la primera se llamará “la” función de gauss.

Ejemplos 11.

◇. Plano $\varphi(s, t) = s\alpha + t\beta$, los vectores tangentes $\varphi_s = \alpha$ y $\varphi_t = \beta$

$$N(p) = \frac{\alpha \times \beta}{\|\alpha \times \beta\|}$$

La aplicación de Gauss del plano, es constante.

◇. Cilindro $\phi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$, los vectores tangentes son:

$$\phi_u = (-r \sin u, r \cos u, 0), \quad \phi_v = (0, 0, 1)$$

$$\phi_u \times \phi_v = (r \cos u, r \sin u, 0), \quad \|\phi_u \times \phi_v\| = r$$

$$N(p) = (\cos u, \sin u, 0)$$

◇. Esfera $\psi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$, donde sus vectores tangentes son:

$$\psi_u = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0),$$

$$\psi_v = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, \cos u)$$

$$\psi_u \times \psi_v = r^2 \cos v (\cos u \cos v, \sin u \sin v, \sin v)$$

$$\|\psi_u \times \psi_v\| = r^2 \cos v$$

$$N(p) = (\cos u \cos v, \sin u \sin v, \sin v) = \frac{1}{r} p$$

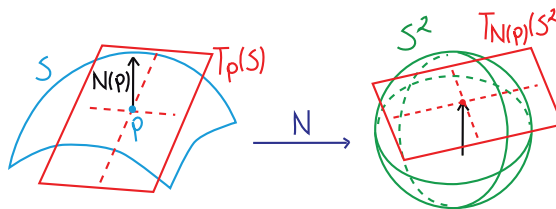
Donde si $r = 1$, N es la función idéntica.

3.4. Operador de horma

”la” función de Gauss es diferenciable.

Definición 19. El operador de horma de la superficie S es la derivada o diferencial

$$dN_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2)$$



El plano tangente $T_p(S)$, por definición, es normal al vector $N(p)$. Por otro lado, en una esfera todo plano tangente es perpendicular al vector de posición (radio) del punto de tangencia. (Esto se nota en el tercer ejemplo, $N(p) = \frac{1}{r}p$) En particular, el plano tangente $T_{N(p)}(S)$ es perpendicular a $N(p)$. Por lo tanto los planos $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son paralelos y se pueden identificar. Y así, el operador de horma es una transformación de $T_p(S)$ en sí mismo,

$$dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$$

Observación: dN_p es simétrico.

[] 2. ALGEBRA LINEAL:

U. T lineal $T : v \times v \rightarrow \mathbb{R}$ es simétrica si $T(u, v) = T(v, u)$.

U. T lineal $T : v \rightarrow v$, v con producto interno, es simétrica si $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$.

En ese caso, la forma cuadrática asociada a T está definida como $v \mapsto (T(u), v)$

Notación: Si φ es una carta, identificando N con N_φ la función de Gauss es función de las variables u, v y entonces

$$N_u = \frac{\partial}{\partial u}(N_\varphi), \quad N_v = \frac{\partial}{\partial v}(N_\varphi)$$

En estos términos, $N_u = dN_p(\varphi_u)$, $N_v = dN_p(\varphi_v)$ son exactamente las imágenes por el operador de horma de los vectores básicos φ_u, φ_v . Basta considerar la curva $C(t) = \varphi(u_0 + t_1, v_0)$ donde $(u_0, v_0) = q = \varphi^{-1}(p)$, luego $C(0) = p$ y $C'(0) = \varphi_u(q) \cdot 1 + \varphi_v(q) \cdot 0 =$

φ_u . Luego, por definición,

$$\begin{aligned} dN_p(\varphi_u) &= \left. \frac{d}{dt}(N_C) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(N_\varphi(u_0 + t_1, v_0)) \right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} N_\varphi \right) 1 + \left(\frac{\partial}{\partial v} N_\varphi \right) 0 = N_u \end{aligned}$$

✓. $\langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$ (Cierta simetría)

N es normal al plano, luego $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ entonces derivando respecto a v ,

$$\langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0$$

Y $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ entonces derivando respecto a u ,

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$$

Pero $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ luego $\langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$.

✓. $\langle dN_p(w), v \rangle = \langle w, dN_p(v) \rangle$

Sea $w = a\varphi_u + b\varphi_v$, $v = c\varphi_u + d\varphi_v$ entonces

$$\begin{aligned} \langle dN_p(w), v \rangle &= \langle adN_p(\varphi_u) + bdN_p(\varphi_v), c\varphi_u + d\varphi_v \rangle \\ &= \langle aN_u + bN_v, c\varphi_u + d\varphi_v \rangle \\ &= ac\langle N_u, \varphi_u \rangle + (ad + bc)\langle N_u, \varphi_v \rangle + bd\langle N_v, \varphi_v \rangle \end{aligned}$$

Y por otro lado

$$\begin{aligned} \langle w, dN_p(v) \rangle &= \langle a\varphi_u + b\varphi_v, cN_u + dN_v \rangle \\ &= ac\langle \varphi_u, N_u \rangle + (bc + ad)\langle \varphi_u, N_v \rangle + bd\langle \varphi_v, N_v \rangle \end{aligned}$$

Afirmación 8. *El operador de horma es simétrico respecto a la P.F.F. Esto es, para cada $v, w \in T_p(S)$ se tiene:*

$$\langle dN_p(w), v \rangle = \langle w, dN_p(v) \rangle$$

como tal, tiene asociada una forma cuadrática.

Definición 20. La segunda forma fundamental SFF de la superficie asigna a cada punto $p \in S$ la forma cuadrática, asociada al operador de horma, esto es

$$\begin{aligned} T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle dN_p(w), v \rangle \end{aligned}$$

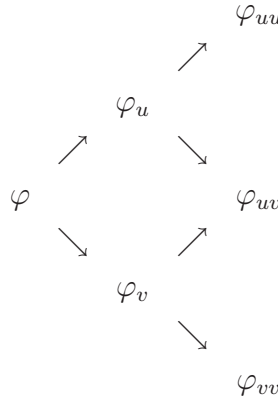
Cálculos: Si $v = a\varphi_u + b\varphi_v$ para cierta carta φ .

$$\begin{aligned} \langle dN_p(a\varphi_u + b\varphi_v), a\varphi_u + b\varphi_v \rangle &= \langle aN_u + bN_v, a\varphi_u + b\varphi_v \rangle \\ &= a^2 \langle N_u, \varphi_u \rangle + 2ab \langle N_u, \varphi_v \rangle + b^2 \langle N_v, \varphi_v \rangle \\ &= a^2 e + 2abf + b^2 g \end{aligned}$$

Los coeficientes de la SFF son

$$\begin{aligned} e &= \langle N_u, \varphi_u \rangle = -\langle N, \varphi_{uu} \rangle \\ f &= \langle N_u, \varphi_v \rangle = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle \\ f &= \langle N_v, \varphi_u \rangle = -\langle N, \varphi_{vu} \rangle \\ g &= \langle N_v, \varphi_v \rangle = -\langle N, \varphi_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Porque $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ luego derivamos en u , $\langle N_u, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle = 0$



3.5. Curvatura

Medir la “forma” de S es medir la manera en que ella se “curva”.



✓. Función de Gauss = normal unitaria = $N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.

✓. Esta función $S \rightarrow S^2$ (esfera) es diferenciable.

✓. Se puede considerar $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$.

¿? Cómo “medir” dN_p si es una T. lineal ¿?

Como su recorrido es el mismo dominio, la matriz de dN_p es cuadrada (2×2) luego puede “medirse” de varias maneras. ¡Por todo esto!

Definición 21. Sea S una superficie. La curvatura gaussiana de S en $p \in S$, $K = \det(dN_p)$ y la curvatura media de S en p es $H = \frac{1}{2} \text{traza}(dN_p)$

Si existiera una base $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ tal que la matriz de dN_p en esa base es

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

entonces

Curvatura Gaussiana $K = k_1 k_2$

Curvatura media $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

[] 3. ALGEBRA LINEAL: Valores y vectores propios

Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo, es decir, $T : V \rightarrow V$. Un vector propio de T (si existe), es un vector tal que $T(v) = \lambda v$ para un escalar λ . En ese caso λ se denomina valor propio y v vector propio.

“Para un valor propio λ fijo, el conjunto de todos los vectores propios juntos con 0 constituyen un subespacio vectorial.”

Prueba: •. $T(0) = \lambda 0$ $0 \in E_\lambda$.

•. $v, w \in E_\lambda$ entonces

$$\begin{aligned} T(v + w) &= T(v) + T(w) \\ &= \lambda v + \lambda w \\ &= \lambda(v + w) \text{ Luego } v + w \in E_\lambda \end{aligned}$$

- $v \in E_\lambda$ y α es un escalar

$$\begin{aligned} T(\alpha v) &= \alpha T(v) \\ &= \alpha(\lambda v) \\ &= \lambda(\alpha v) \text{ Luego } \alpha v \in E_\lambda \end{aligned}$$

◇

Traducción: λ es valor propio de T si y solo si existe $v \neq 0$ con $T(v) = \lambda v$.

Si y solo si existe $v \neq 0$ con $T(v) = \lambda I(v)$.

Si y solo si existe $v \neq 0$ con $(T - \lambda I)(v) = 0$.

λ es valor propio si y solo si $T - \lambda I$ no es inyectiva propio de T .

Si V es un espacio de dimensión finita si y solo si $T - \lambda I$ no es biyectiva.

Si y solo si $\det(T - \lambda I) = 0$. Esto es:

En dimensión finita. λ es valor propio si y solo si $\det(T - \lambda I) = 0$ de T .

$\det(T - \lambda I)$ es un polinomio en λ , cuyo grado es exactamente la dimensión del espacio.

“Matrices:” El polinomio característico de una matriz cuadrada A es

$$P_c(x) = \det(A - xI)$$

En dimensión finita. λ es valor propio si y solo si λ es raíz del P_c de (una matriz de) T .

Ejemplos 12.

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x + y, x + y)$$

¿? Tiene valores y vectores propios ¿?

Base canónica:

$$T(1, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$$

Su matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$

Polinomio característico:

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(A - xI) \\ &= \det \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)^2 - 1 = 1 - 2x + x^2 - 1 = x^2 - 2x \\ P(x) &= x(x-2) \end{aligned}$$

Sus raíces son 0 y 2. La transformación lineal tiene dos valores propios, a saber, 0 y 2.

Vectores propios:

Encontrado el valor propio λ , los vectores propios resultan de resolver el sistema lineal

$$[A - \lambda I]x = 0$$

Cuando $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x + y &= 0 \\ y &= -x \end{aligned}$$

Solución $(x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$, vector propio $(1, -1)$.

Cuando $\lambda = 2$

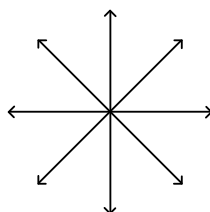
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x - y &= 0 \\ y &= x \end{aligned}$$

Solución $(s, y) = (x, x) = x(1, 1)$, vector propio $(1, 1)$.

$$\text{En efecto: } \begin{cases} T(1, -1) = (0, 0) = 0(1, -1) \\ T(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1) \end{cases}$$

Matriz diagonal. En la base $\{(1, -1), (1, 1)\}$ la matriz de T es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Direcciones principales:



2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x)$

¿Tiene valores y vectores propios?

Matriz en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$P(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

¡No tiene raíces en $\mathbb{R}$! Luego T no tiene valores propios.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, 2x + y)$ Matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$P(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

La única raíz es 1. Vectores propios $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x = 0$$

vector propio $(0, 1)$.

¡No hay base para diagonalizar!

[] 4. En general: Sea V un espacio (de cualquier dimensión) con producto interno. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación simétrica, es decir,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$$

Supóngase que $T(u) = \lambda u$ y $T(v) = \mu v$ vectores propios de valores distintos $\lambda \neq \mu$

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \mu v \rangle$$

$$\lambda \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

$$(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0 \text{ Y como } \lambda \neq \mu \text{ entonces}$$

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ } u, v \text{ son ortogonales}$$

En un espacio con producto interno, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos de una transformación simétrica son ortogonales.

Nota 7. En espacios con producto interno sobre los $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \\ \langle u, \alpha v \rangle = \alpha^* \langle u, v \rangle \end{cases}$$

Ahora supóngase que T es simétrico y $T(u) = \alpha(u)$, es decir, λ es valor propio.

$$\langle T(u), u \rangle = \langle u, T(u) \rangle$$

$$\langle \lambda u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle$$

$$\lambda \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle u, u \rangle = 0$$

$$0 \neq \langle u, u \rangle > 0 \quad \bar{\lambda} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora por el teorema fundamental del Álgebra, P_c tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$, por lo anterior, es real; por otros detalles, los vectores propios generan el espacio; y los vectores propios de valores distintos son ortogonales.

Teorema 8. *Toda transformación lineal simétrica en un espacio real de dimensión finita tiene una base ortogonal* construida por vectores propios. Por lo tanto se puede diagonalizar.*

* Ortogonales entre si y de norma 1 (unitarios.)

De nuevo a la curvatura

Ya se probó que la transformación lineal $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$, llamado operador de horma, es simétrico respecto a la PFF.

Corolario 2. *Por lo tanto, existen dos vectores unitarios y ortogonales $e_1, e_2 \in T_p(S)$ y escalares $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 \leq k_2$ tal que*

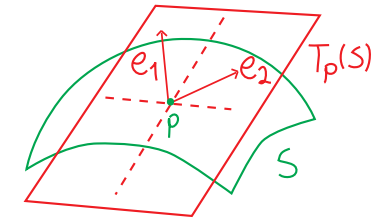
$$dN_p(e_1) = k_1 e_1, \quad dN_p(e_2) = k_2 e_2$$

Son los vectores y valores propios de dN_p

Los vectores e_1, e_2 se denominan direcciones principales; los escalares k_1, k_2 curvaturas principales.

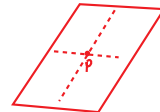
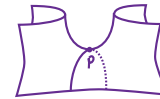
Ahora se tiene:

- La curvatura gaussiana es $K = \det(dN_p) = k_1 k_2$.
- La curvatura media es $H = \frac{1}{2} \text{traza}(dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$
 e_1, e_2 indican las direcciones en las cuales más cambia N .

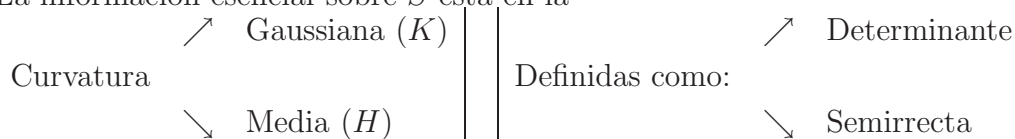


Según la curvatura, el punto $p \in S$ es:

- . Elíptico: si $K > 0$
- . Hiperbólico: si $K < 0$
- . Parabólico: si $K = 0, dN_p \neq 0$
- . Plano: si $K = 0$ y $dN_p = 0$



La información esencial sobre S está en la



de dN_p , la variación del normal unitario. Pero (¡FORTUNA!) dN_p es simétrica y por lo tanto, diagonalizable.

$$(dN_p)_{\{e_1, e_2\}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad k_1 \leq k_2 \quad K = k_1 k_2 \quad H = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

¿?Cómo calcular K, H, k_1, k_2 de manera (más o menos) eficiente¿?

En general, el cálculo directo de dN_p es muy difícil, pues

$$N = \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \varphi_u \times \varphi_v$$

y aparecen cocientes, además se deben expresar N_u y N_v en términos de φ_u y φ_v . Pero (¡FORTUNA!) hay atajos. Sigue un cálculo algebraico de las curvas.

Supóngase que la matriz de dN_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

¿?Eso qué significa ¿?

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial u} &= N_u = a\varphi_u + c\varphi_v \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= N_v = b\varphi_u + d\varphi_v \end{aligned}$$

Multiplicando PFF por φ_u, φ_v en orden resulta.

$$\begin{aligned} (*) \quad \langle N_u, \varphi_u \rangle &= a\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + c\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ e = -\langle N, \varphi_{uu} \rangle &= aE + cF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) \quad \langle N, \varphi_u \rangle &= 0 \\
\langle N_u, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle &= 0 \\
\langle N_u, \varphi_u \rangle &= -\langle N, \varphi_{uu} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i. \quad f = \langle N_u, \varphi_v \rangle &= a\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + c\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\
&= aF + cG \\
&= -\langle N, \varphi_{vu} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii. \quad f = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle &= \langle N_v, \varphi_u \rangle \\
&= b\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + d\langle \varphi_v, \varphi_u \rangle \\
&= bE + dF
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g = -\langle N, \varphi_{vv} \rangle &= \langle N_v, \varphi_v \rangle \\
&= b\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + d\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\
&= bF + dG
\end{aligned}$$

Esto da un “sistema lineal” que se puede expresar de manera matricial así:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

Pero (¡FORTUNA!), por la identidad de lagrange

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\
&= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\
&= \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 > 0
\end{aligned}$$

Porque φ_u, φ_v son L.I. es decir, $\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = EG - F^2 \neq 0$ y esta matriz tiene inversa:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz del operador horma en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego la curvatura media es:

$$H = \frac{a + d}{2} = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$$

y la curvatura gaussiana (¡AL FIN!) es:

$$\begin{aligned} K &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} [(eG - fF)(gE - fF) - (fG - gF)(fE - eF)] \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} [eg(EG - F^2) - f^2(EG - F^2)] \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} [(eg - f^2)(EG - F^2)] \end{aligned}$$

Luego

$$K = ad - bc = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Ahora: $k_1 = ?$, $k_2 = ?$

Las curvaturas principales son los valores propios de dN_p , es decir, de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

El polinomio característico es:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{pmatrix} &= (a - x)(d - x) - bc \\ &= (ad - bc) + (-ax - dx) + x^2 \\ &= x^2 - (a + d)x + (ad - bc) \\ P(x) &= x^2 - 2Hx + K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sus raíces son: } x &= \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} \\ &= \frac{2H \pm 2\sqrt{H^2 - K}}{2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}\end{aligned}$$

Así: $k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$ y $k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$.

Ejemplos 13.

1. La esfera: $\varphi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$

$$\varphi_u = (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)$$

$$\varphi_v = (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = r^2 \cos v (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = r^2 \cos v$$

$$N = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

$$E = r^2 \cos^2 v$$

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad EG - F^2 = EG = r^2 \cos^2 v$$

$$G = r^2$$

$$\varphi_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \sin u \cos v, 0)$$

$$\varphi_{uv} = (r \sin u \sin v, -r \cos u \sin v, 0)$$

$$\varphi_{vv} = (-r \cos u \cos v, -r \sin u \cos v, -r \sin v)$$

$$e = -\langle N, \varphi_{uu} \rangle = r \cos^2 v$$

$$f = 0 = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle$$

$$g = -\langle N, \varphi_{vv} \rangle = r$$

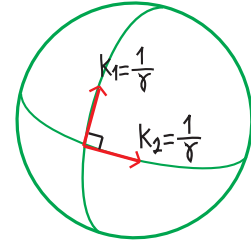
Luego,

$$\begin{aligned}H &= \frac{(r \cos^2 v)(r^2) + (r)(r^2 \cos^2 v) - 0}{2r^4 \cos^2 v} \\ &= \frac{2r^3 \cos^2 v}{2r^4 \cos^2 v} = \frac{1}{r} \\ H &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{(r \cos^2 v)(r)}{r^4 \cos^2 v} \\
&= \frac{r^2 \cos^2 v}{r^4 \cos^2 v} = \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Las curvaturas de la esfera son “constantes”

$$\begin{aligned}
k_1 &= H - \sqrt{H^2 - K} \\
&= \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r} \\
k_2 &= k_1 = \frac{1}{r}
\end{aligned}$$



$\frac{1}{r}$ es la curvatura de la circunferencia de radio r .

2. El toro: $\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$

$$\varphi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$\varphi_v = (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = -r(R + r \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = r(R + r \cos u)$$

$$N = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

$$E = r^2$$

$$F = 0$$

$$G = (R + r \cos u)^2$$

$$\varphi_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

$$\varphi_{uv} = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0)$$

$$\varphi_{vv} = (-(R + r \cos u) \cos v, -(R + r \cos u) \sin v, 0)$$

$$e = -\langle N, \varphi_{uu} \rangle = -r$$

$$f = 0 = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle$$

$$g = -\langle N, \varphi_{vv} \rangle = -(R + r \cos u) \cos u$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{-r(R + r \cos u)^2 - r^2(R + r \cos u) \cos u}{2r^2(R + r \cos u)^2} \\
 &= \frac{-r(R + r \cos u)(R + r \cos u + r \cos u)}{2r^2(R + r \cos u)^2} \\
 H &= \frac{-R + 2r \cos u}{2r(R + r \cos u)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= \frac{r(R + r \cos u \cos u)}{r^2(R + r \cos u)^2} \\
 &= \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}
 \end{aligned}$$

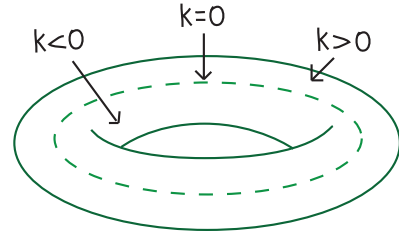
Las curvaturas de la esfera son “constantes”

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\frac{1}{v} \\
 k_2 &= -\frac{\cos u}{R + r \cos u}
 \end{aligned}$$

$$k > 0 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$

$$k = 0 \text{ si } u = -\frac{\pi}{2}, u = \frac{\pi}{2}$$

$$k < 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$$



3. Otra vez la esfera: $\varphi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$ entonces

$$N(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

es decir con esta carta $N = \frac{1}{r}\varphi$. En este caso si es “viable” calcular directamente dN . En efecto,

$$\begin{aligned}
 N_u &= \frac{1}{r}\varphi_u = \frac{1}{r}\varphi_u + 0\varphi_v \\
 N_v &= \frac{1}{r}\varphi_v = 0\varphi_u + \frac{1}{r}\varphi_v
 \end{aligned}$$

De manera que $dN = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ y esta matriz ya es diagonal. Luego

$$k_1 = \frac{1}{r} = k_2$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{r}, \quad K = k_1 k_2 = \frac{1}{r^2}$$

4. El plano: $\varphi(s, t) = s\alpha + t\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ independiente

El camino mecánico:

$$\varphi_s = \alpha, \quad \varphi_t = \beta$$

$$\varphi_s \times \varphi_t = \alpha \times \beta$$

$$\|\varphi_s \times \varphi_t\| = \|\alpha \times \beta\|$$

$$N = \frac{\alpha \times \beta}{\|\alpha \times \beta\|} \text{ ¡Constante!}$$

$$E = \alpha \cdot \alpha \quad \varphi_{ss} = 0 \quad e = 0$$

$$F = \alpha \cdot \beta \quad \varphi_{st} = 0 \quad f = 0$$

$$G = \beta \cdot \beta \quad \varphi_{tt} = 0 \quad g = 0$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad H = 0, \quad K = 0$$

Otro camino mecánico: (solo en algunos casos, no lo intente en casa)

N es constante, en este caso también es viable calcular directamente dN

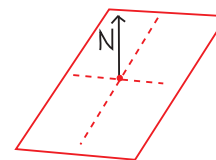
$$N_s = 0 = 0\varphi_s + 0\varphi_t$$

$$N_t = 0 = 0\varphi_s + 0\varphi_t$$

De manera que $dN = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y, como la matriz es diagonal,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad H = 0, \quad K = 0$$

¡En todas las direcciones el plano no se “curva”!



$K > 0$ Elíptico

Recordando las convenciones: $K = 0$ Plano o parabólico

$K < 0$ Hiperbólico

- ✓. En el toro existe todos los tres.
- ✓. En la esfera siempre $K > 0$.
- ✓. En el plano siempre $K = 0$.
- ✓. ¿Existe con $K < 0$ siempre.? VEAMOS

5. La silla de montar: como carta de Monge $\varphi(u, v) = (u, v, \frac{v^2 - u^2}{2})$

$$\varphi_u = (1, 0, -u)$$

$$\varphi_v = (0, 1, v)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (u, -v, 1) \neq 0$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$$

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}(u, -v, 1)$$

$$\begin{array}{lll} E = 1 + u^2 & \varphi_{uu} = (0, 0, -1) & e = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ F = -uv & \varphi_{uv} = (0, 0, 0) & f = 0 \\ G = 1 + v^2 & \varphi_{vv} = (0, 0, 1) & g = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \end{array}$$

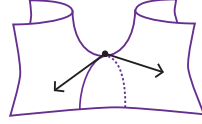
$$\begin{aligned} H &= \frac{\frac{1+v^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + 0}{2(1 + u^2 + v^2)} \\ &= \frac{v^2 + u^2}{2(1 + u^2 + v^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\frac{1}{1+u^2+v^2}}{1 + u^2 + v^2} \\ &= -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

- ✓. Se nota que en todo punto $K < 0$.
- ✓. En particular, en el origen $u = 0 = v$ se tiene $H = 0$ y $K = -1$, luego

$$\begin{aligned} k_2, k_1 &= H \pm \sqrt{H^2 - K} \\ &= 0 \pm \sqrt{0 - (-1)} \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

Así que $k_1 = -1$ y $k_2 = 1$ (la silla de montar se “curva” en sentido contrario en dos direcciones)



Y por otro camino

$$\begin{aligned}
 N_u &= -\frac{u}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(u, -v, 1) + \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{1/2}}(1, 0, 0) \\
 &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(1+v^2, uv, -u) \\
 &= \dot{?}(1, 0, -u) + \dot{?}(0, 1, v) \\
 &= \frac{1+v^2}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(1, 0, -u) + \frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(0, 1, v)
 \end{aligned}$$

Y de la misma manera

$$\begin{aligned}
 N_u &= -\frac{v}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(u, -v, 1) + \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{1/2}}(0, -1, 0) \\
 &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(-uv, -(1+u^2), -v) \\
 &= \dot{?}(1, 0, -u) + \dot{?}(0, 1, v) \\
 &= -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(1, 0, -u) - \frac{1+u^2}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}(0, 1, v)
 \end{aligned}$$

En este caso, entonces

$$dN = \begin{bmatrix} \frac{1+v^2}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} & -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \\ \frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} & -\frac{1+u^2}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

Y, de nuevo,

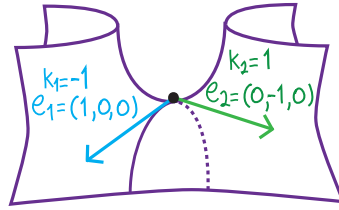
$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+v^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} - \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right) \\
 &= \frac{v^2 - u^2}{2(1+u^2+v^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{(1+v^2)(1+u^2)}{(1+u^2+v^2)^3} + \frac{u^2v^2}{(1+u^2+v^2)^3} \\
 &= -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}
 \end{aligned}$$

En particular en $u = 0 = v$ se tiene

$$dN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Y los vectores principales son $(1, 0, 0)$ y $(0, -1, 0)$



Dos interpretaciones geométricas de la curvatura Gaussiana:

◇. Mediante áreas

Teorema 9. Sea A el área de una región R que contiene al punto p y sea B el área de su imagen $N(R)$ a través de la función de Gauss N . En estas condiciones,

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{B}{A} = |K(p)|$$

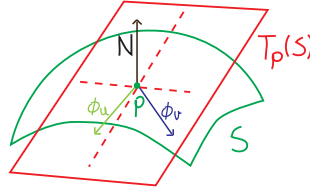
donde “ $A \rightarrow 0$ ” significa que R se encoge alrededor del punto P .

Esta fue la definición original de curvatura, dada por Gauss.

◇. Respecto al plano tangente.

Teorema 10.

- . Si $K(p) > 0$, existe una vecindad de p tal que todos los puntos de S en esa vecindad están a un solo lado del plano tangente $T_p(S)$.
- . Si $K(p) < 0$, cualquier vecindad de p contiene puntos de S a cada lado del plano tangente $T_p(S)$.



- ✚. La(s) segunda(s) derivada(s) de la carta (ellas aparecen en los coeficientes e, f, g) se pueden expresar en términos de la base “natural” $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$
- ✚. $\varphi_{uu} = \clubsuit \varphi_u + \diamond \varphi_v + \spadesuit N$. El tercer coeficiente, $\spadesuit$, es fácil de calcular, multiplicando escalarmente por N :

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{uu}, N \rangle &= \clubsuit \langle \varphi_u, N \rangle + \diamond \langle \varphi_v, N \rangle + \spadesuit \langle N, N \rangle \\
 &= \clubsuit \odot + \diamond \odot + \spadesuit 1 \\
 &= \spadesuit
 \end{aligned}$$

Pero $\langle \varphi_{uu}, N \rangle = -e$, así que $\varphi_{uu} = \clubsuit \varphi_u + \diamond \varphi_v - eN$

- ✚. Los coeficientes restantes dependen de uu (por φ_{uu}) y también de u (en φ_u) ó de v (en φ_v). Estos coeficientes se denotan con los llamados símbolos de *Christoffel* Γ_{ij}^k , donde los subíndices ij corresponden a las segundas derivadas y el súper índice k corresponde al vector de la base. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \varphi_u + \Gamma_{uu}^v \varphi_v - eN \\
 \varphi_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \varphi_u + \Gamma_{uv}^v \varphi_v - fN \\
 \varphi_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \varphi_u + \Gamma_{vv}^v \varphi_v - gN
 \end{aligned}$$

Son los 6 símbolos de *Christoffel*, se nota que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Gran tarea: “Despejar” los 6 símbolos de *Christoffel*.

Primera estrategia: producto escalar por las derivadas parciales φ_u, φ_v .

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \Gamma_{uu}^u \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{uu}^v \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle - e \langle N, \varphi_u \rangle \\
 \begin{cases} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= E\Gamma_{uu}^u + F\Gamma_{uu}^v \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= F\Gamma_{uu}^u + G\Gamma_{uu}^v \end{cases} \\
 \begin{cases} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle &= E\Gamma_{uv}^u + F\Gamma_{uv}^v \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle &= F\Gamma_{uv}^u + G\Gamma_{uv}^v \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = E\Gamma_{vv}^u + F\Gamma_{vv}^v \\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = F\Gamma_{vv}^u + G\Gamma_{vv}^v \end{cases}$$

Escribiendo de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix}$$

Segunda estrategia: Derivadas parciales de los coeficientes E, F, G .

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\ E_u &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\ E_v &= \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ F_u &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle \\ F_v &= \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\ G_u &= \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_v, \varphi_{vu} \rangle = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \\ G_v &= \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle = 2\langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2}E_v \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2}G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2}G_v \end{cases}$$

Combinando los resultados anteriores, resulta:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Recuérdese que $EG - F^2 = \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 > 0$ porque φ es una carta.

Afirmación 9. *Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k dependen únicamente de los coeficientes de la primera forma fundamental E, F, G y de sus derivadas parciales E_u, E_v, F_u, F_v y G_u, G_v .*

“Esto tiene significado geométrico”

Ejemplos 14.

1. La esfera: $\varphi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$

$$\varphi_u = (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)$$

$$\varphi_v = (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)$$

$$E = r^2 \cos^2 v \begin{cases} E_u = 0 \\ E_v = -2r^2 \cos v \sin v = -r^2 \sin 2v \end{cases}$$

$$F = 0 \begin{cases} F_u = 0 \\ F_v = 0 \end{cases}$$

$$G = r^2 \begin{cases} G_u = 0 \\ G_v = 0 \end{cases}$$

$$EG - F^2 = r^4 \cos^2 v$$

Luego la matriz es $\frac{1}{r^4 \cos^2 v} \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 v \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \sec^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Y así

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \sec^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r^2 \sin 2v}{2} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r^2 \sin 2v}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \sec^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r^2 \sin 2v}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\frac{r^2 \sin v}{\cos v} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin v}{\cos v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para la esfera, $\Gamma_{uu}^v = \sin v \cos v$ y $\Gamma_{uv}^u = -\frac{\sin v}{\cos v}$ mientras $\Gamma_{ij}^k = 0$ en los demás casos.

2. El cilindro: $\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$

$$\varphi_u = (-r \sin u, r \cos u, 0)$$

$$\varphi_v = (0, 0, 1)$$

$$E = r^2 \begin{cases} E_u = 0 \\ E_v = 0 \end{cases}$$

$$F = 0 \begin{cases} F_u = 0 \\ F_v = 0 \end{cases}$$

$$G = 1 \begin{cases} G_u = 0 \\ G_v = 0 \end{cases}$$

Para el cilindro, $\Gamma_{ij}^k = 0$ en todos los casos.

3. El plano: Obviamente $\Gamma_{ij}^k = 0$ en todos los casos.

4. El toro: $\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos u, (R + r \cos u) \sin u, r \sin u)$

$$\varphi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$\varphi_v = (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0)$$

$$E = r^2 \begin{cases} E_u = 0 \\ E_v = 0 \end{cases}$$

$$F = 0 \begin{cases} F_u = 0 \\ F_v = 0 \end{cases}$$

$$G = (R + r \cos u)^2 \begin{cases} G_u = -2(R + r \cos u) \sin u \\ G_v = 0 \end{cases}$$

$$EG - F^2 = r^2(R + r \cos u) \neq 0$$

Luego la matriz inversa es $\frac{1}{r^2(R+r \cos u)^2} \begin{bmatrix} (R + r \cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+r \cos u)^2} \end{bmatrix}$

Y así los símbolos de *Christiffel*:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+r \cos u)^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r(R + r \cos u) \sin v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{r \sin u}{R+r \cos u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+r \cos u)^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r(R + r \cos u) \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(R+r \cos u) \sin u}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para el toro, $\Gamma_{uv}^v = -\frac{r \sin u}{R+r \cos u}$ y $\Gamma_{vv}^u = \frac{(R+r \cos u) \sin u}{r}$ y $\Gamma_{ij}^k = 0$ en los demás casos.

Tarea: Probar lo mismo para la curvatura Gaussiana K .

Camino: La igualdad $\varphi_{uvv} = \varphi_{vvu}$ (es evidente).

Cálculos: Por un lado

$$\begin{aligned}
 \varphi_{uuv} &= (\varphi_{uu})_v \\
 &= (\Gamma_{uu}^u)_v \varphi_u + \Gamma_{uu}^u \varphi_{uv} + (\Gamma_{uu}^v)_v \varphi_v + \Gamma_{uu}^v \varphi_{vv} - e_v N - e N_v \\
 &= (\Gamma_{uu}^u)_v \varphi_u + \Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uv}^u \varphi_u + \Gamma_{uv}^u \varphi_v - f N) + (\Gamma_{uu}^v)_v \varphi_v + \Gamma_{uu}^v (\Gamma_{vv}^u \varphi_u + \Gamma_{vv}^v \varphi_v - g N) - e_v N - e(b\varphi_u + d\varphi_v)
 \end{aligned}$$

Y por el otro lado

$$\begin{aligned}
 \varphi_{uvu} &= (\varphi_{uv})_u \\
 &= (\Gamma_{uv}^u)_u \varphi_u + \Gamma_{uv}^u \varphi_{uu} + (\Gamma_{uv}^v)_u \varphi_v + \Gamma_{uv}^v \varphi_{vu} - f_u N - f N_u \\
 &= (\Gamma_{uv}^u)_u \varphi_u + \Gamma_{uv}^u (\Gamma_{uu}^u \varphi_u + \Gamma_{uu}^v \varphi_v - e N) + (\Gamma_{uv}^v)_u \varphi_v + \Gamma_{uv}^v (\Gamma_{vu}^u \varphi_u + \Gamma_{vu}^v \varphi_v - f N) - f_u N - f(a\varphi_u + c\varphi_v) \\
 &= [(\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u - e a] \varphi_u + [\Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vu}^v - f c] \varphi_v - [\Gamma_{uv}^u e + \Gamma_{uv}^v f + f u] N
 \end{aligned}$$

Ahora sean

$$\begin{aligned}
 R_{uuv}^u &= (\Gamma_{uu}^u)_v - (\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vu}^u \\
 &\quad \text{Y} \\
 R_{uuv}^v &= (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vu}^v
 \end{aligned}$$

Afirmación 10. *Estos coeficientes solo dependen de la primera forma fundamental PFF (E, F, G) y sus derivadas.*

Demostración. Porque eso sucede con los símbolos de *Christoffel* Γ_{ij}^k . ◇

Ahora

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi_{uuv} - \varphi_{uvu} \\
 &= [R_{uuv}^u - e b + f a] \varphi_u + [R_{uuv}^v - e d + f c] \varphi_v + [f \Gamma_{uu}^u + g \Gamma_{uu}^v + e_v - e \Gamma_{uv}^u - f \Gamma_{uv}^v - f_u] N
 \end{aligned}$$

$$\text{De donde } \begin{cases} R_{uuv}^u + f a - e b = 0 \\ R_{uuv}^v + f c - e d = 0 \end{cases}$$

Pero $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} eG-fF & fG-gF \\ fE-eF & gE-fF \end{bmatrix}$ por tanto

$$\begin{aligned} R_{uv}^u &= eb - fa \\ &= e \left(\frac{fG - gF}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{eG - fF}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{efG - egF - efG + f^2F}{EG - F^2} \\ &= -\frac{eg - f^2}{EG - F^2}F = -KF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{uv}^v &= ed - fc \\ &= e \left(\frac{gE - fF}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{fE - eF}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{egE - efF - f^2E + efF}{EG - F^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}E = KE \end{aligned}$$

Finalmente: $K(EG - F^2) = KEG - KF^2 = R_{uv}^vG + R_{uv}^uF$, luego

$$K = \frac{R_{uv}^uF + R_{uv}^vG}{EG - F^2}$$

Teorema 11. *Teorema Egregio de Gauss La curvatura gaussiana K depende únicamente de la PFF (E, F, G y sus derivadas).*

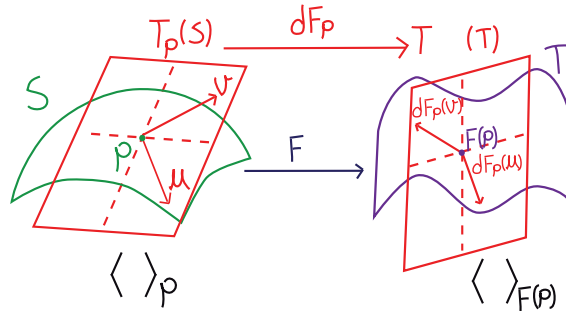
¿Y eso qué ¿?

Pues lo que depende de la PFF es un invariante bajo isometrías, es decir, un invariante geométrico.

¿Y qué es una tal isometría ¿?

Una función diferenciable $F : S \rightarrow T$ entre superficies es una isometría (en p) si para cada par de vectores tangentes $u, v \in T_p(S)$ se tiene

$$\langle u, v \rangle_p = \langle dF_p(u), dF_p(v) \rangle_{F(p)}$$

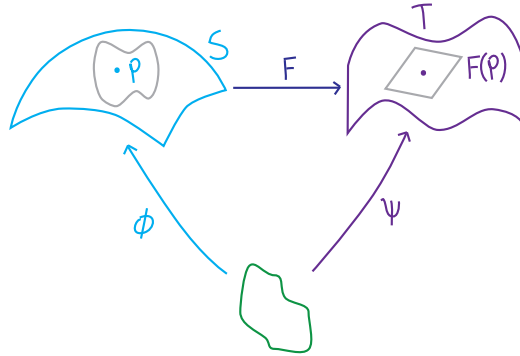


En general entre espacios vectoriales con producto interno una isometría preserva normas (pues $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$), ángulos (pues $\theta_{u,v} = \cos^{-1} \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right)$) y áreas (pues el área de un triángulo está determinado por la norma de dos lados y el ángulo entre ellos) es decir, preserva toda la geometría.

Si F además es difeomorfismo y φ es una carta para S en p , entonces la compuesta

$$\psi = F\varphi$$

es una carta para T en $F(p)$. En este caso, los coeficientes E, F, G de la PFF de φ en p y ψ en $F(p)$ son lo mismo. Pues, en este caso,



$$\psi_u = dF_p(\varphi_u) \text{ y } \psi_v = dF_p(\varphi_v)$$

Luego, por ejemplo $E_p = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle dF_p(\varphi_u), dF_p(\varphi_v) \rangle = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = E_{F(p)}$ y entonces todas las funciones que dependen de los coeficientes de la PFF coinciden en p y $F(p)$.

Teorema 12. *Egregio de Gauss [versión 2] La curvatura gaussiana es invariante bajo isometría (locales).*

Corolario 3 (El más simple de todos). *No existe ninguna isometría entre la esfera y el plano.*

Porque en la esfera de radio r es $K = \frac{1}{r^2}$ y en el plano es $K = 0$.

Consecuencia Práctica: *No existe el mapamundi plano perfecto.*

3.6. Ejercicios

1. Si f y g son 0-formas en una superficie S y α es una 1-forma en S , demuestre lo siguiente.

a) $d(f \cdot g) = dfg + f dg$

b) $d(f \cdot \alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$

2. En el plano $\mathbb{R}^2$, toda 1-forma α se puede expresar como $\alpha = f dx + g dy$ para ciertas 0-formas f y g , mientras toda 2-forma ω se puede expresar como $\omega = h dx \wedge dy$ para cierta 0-forma h . En estos términos, verifique lo siguiente.

a) Si $\alpha = f dx + g dy$ y $\beta = l dx + m dy$ son 1-formas, entonces $\alpha \wedge \beta = (fm - gl) dx \wedge dy$.

b) Si f es una 0-forma, $df = f_x dx + f_y dy$.

c) Si $\alpha = f dx + g dy$ es una 1-forma, $d\alpha = (g_x - f_y) dx \wedge dy$.

3. Demuestre las siguientes fórmulas de integración por partes.

a) Si f y g son 0-formas entonces

$$\int_C f dg = (f \cdot g)(c(t)) \Big|_a^b - \int_C g df.$$

b) Si f es una 0-forma y α es una 1-forma entonces

$$\iint_R f d\alpha = \int_{\partial R} f \cdot \alpha - \iint_R df \wedge \alpha.$$

4. Encuentre los coeficientes métricos (E, F, G) de la *helicoide* con carta

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

donde $a > 0$, $0 < u < 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$.

5. Pruebe que el área del toro es $4\pi^2 rR$ (siendo r, R los radios).
6. De las superficies siguientes encuentre, en cualquier punto, la curvatura gaussiana, la curvatura media y las dos curvaturas principales.

a) El cilindro

$$\phi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$$

$$r > 0, 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty.$$

b) La helicoides

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$$

$$a > 0, -\infty < u < \infty, 0 < v < 2\pi.$$

7. De las superficies siguientes encuentre, en cualquier punto, la curvatura gaussiana.

a) La carta de Monge

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

f diferenciable.

b) La superficie de revolución

$$\phi(u, v) = (e^{au} \cos v, e^{au} \sin v, be^{au})$$

$$-\infty < u < \infty, 0 < v < 2\pi.$$

c) La superficie de revolución

$$\phi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u)$$

$$f \text{ diferenciable, } f(u) > 0, a < u < b, 0 < v < 2\pi.$$

Bibliografía

- [1] Leonardo Solanilla, Primer curso de Geometria Diferencial de Superficies. Universidad del Tolima, 2006.
- [2] M. do carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Pretice-Hall, 1976.
- [3] Diego luis Hoyos, Notas de Geometria Diferencial. Universidad del valle, 1988.
- [4] Martin lipschuts, Geometria Diferencial. Serie Schaum. McGraw-Hill, 1971.
- [5] Barrett O'Neill, Elementos de Geometria Diferencial. Limusa Wiley, 1972.
- [6] http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/diff_geom/tc.html
- [7] <http://www.cs.elte.hu/geometry/csikos/dif/dif.html>
- [8] http://www.matematicas.net/paraiso/materia.php?id=ap_geodif