

Notas de Cálculo I para Ingeniería

Javier G. Rivera G.



Universidad de Ibagué

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Ciclo Común De Ingeniería

Ibagué, diciembre de 2013

Índice general

Introducción	8
1. Límites y Continuidad	9
1.1. Límites	9
1.1.1. Límite de funciones polinómicas y racionales	10
1.1.2. Calcular límites indeterminados	12
1.1.3. Límites laterales	13
1.1.4. Límite de funciones trascendentes	17
1.1.5. Límite al infinito	20
1.2. Continuidad	23
1.2.1. Continuidad de la función compuesta, y en un intervalo	24
1.3. Otras aplicaciones	26
1.3.1. Asíntotas verticales y horizontales	26
1.3.2. Pendiente de la recta tangente	27
1.3.3. Velocidad	27
1.4. Ejercicios	28
2. Cálculo Diferencial	31
2.1. Concepto básico	31
2.2. Derivada de funciones algebraicas	34
2.2.1. Regla de la constante por la función	34
2.2.2. Regla de la suma de dos funciones	34
2.2.3. Regla del producto de dos funciones	35
2.2.4. Regla del cociente de dos funciones	37
2.3. Derivada de funciones compuestas	39
2.4. Derivadas de funciones trascendentes	41
2.5. Derivadas de una función inversa	46

2.6. Derivada de la función implícita	47
2.7. Derivadas de orden superior	51
2.8. Ejercicios	53
3. Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio	57
3.1. Teorema de Rolle	59
3.2. Teorema del Valor Medio de Cauchy	59
3.3. Teorema del Valor Medio	60
3.4. Ejercicios	63
4. Aplicaciones	65
4.1. Trazado de curvas	65
4.1.1. Criterio de la primera derivada para extremos	65
4.1.2. Criterio de la segunda derivada para extremos	66
4.1.3. Criterio de la derivada para la convexidad	67
4.2. Optimización	73
4.3. Ejercicios	83
5. Introducción al Cálculo Integral	86
5.1. Definición de la Integral de Riemann	86
5.2. Propiedades de la Integral de Riemann	88
5.2.1. Integración por Sustitución	88
5.2.2. Integración por Partes	89
5.2.3. Monotonía de la Integral	92
5.2.4. Teorema del Valor Medio para Integrales	92
5.2.5. Fórmulas básicas de integración	93
5.3. Ejercicios	94

Índice de figuras

1.1.	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	9
1.2.	Límites laterales	14
1.3.	$C(x) = \text{costos}$	15
1.4.	$f(x) = \sin x$	18
1.5.	$g(x) = \cos x$	18
1.6.	Función parte entera	24
1.7.	Función Costo $C(x)$	25
1.8.	Recta secante a $f(x)$	27
2.1.	La recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$	31
2.2.	Cociente diferencial	32
3.1.	Máximo y mínimo local	58
3.2.	Teorema de Rolle	59
3.3.	Valor Medio	60
4.1.	Mínimo y Máximo	66
4.2.	Cóncavo y Convexo	67
4.3.	Punto de inflexión	68
4.4.	Traza de la curva $y = x^2 - 1$	69
4.5.	Traza de la curva $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$	70
4.6.	Traza de la curva $y = x + \frac{1}{x}$	71
4.7.	Traza de la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$	73
5.1.	Valor Medio para Integrales	93

Índice de cuadros

1.1. Identidades trigonométricas	19
1.2. Comportamiento de f	22
1.3. Comportamiento de g	22
2.1. Derivadas trigonométricas y derivadas trigonométricas inversa	44
4.1. Tabulación de la curva $y = x^2 - 1$	68
4.2. Tabulación de la curva $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$	69
4.3. Tabulación de la curva $y = x + \frac{1}{x}$	71
4.4. Tabulación de la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$	72

Introducción

Las notas universitarias son la actualización del módulo “*Talleres de Cálculo I, segunda edición*” [7]. Uno de los motivos para escribir este cuadernillo es que la Universidad de Ibagué le brinde al estudiante y al docente una guía del curso.

Este libro fue escrito para mostrar un adecuado enfoque hacia la técnica y un básico desarrollo teórico con abundantes ejemplos resueltos.

Esta edición está dividida en cinco capítulos, titulados: Límites y continuidad; cálculo diferencial; teorema de Rolle y teorema del valor medio; aplicaciones y por último introducción al cálculo integral.

Muchas de las definiciones y teoremas escritos en estos capítulos fueron tomados de excelentes textos matemáticos como: Calculus de Tom M. Apostol, Cálculo diferencial e integral de James Stewart, el Cálculo de Leithold, entre otros citados en la bibliografía, utilizados para apoyar este módulo y el curso.

Y otros términos empleados fueron transmitidos en mis estudios de pregrado por los profesores: Solanilla, Oostra, Cardeno entre otros profesores en la Universidad del Tolima.

Este trabajo se empezó a escribir en el 2012, el primer semestre que empecé a trabajar con la Universidad de Ibagué dictando el curso de Cálculo I como catedrático. Todo fue digitado en L^AT_EX y sus gráficos hechos a mano en Adobe Illustrator.

Javier Giovanni Rivera Galindo¹

¹Profesional en Matemáticas con Énfasis en Estadística
Universidad del Tolima
Catedrático universidad de Ibagué
javier.rivera@unibague.edu.co



CAPÍTULO 1

Límites y Continuidad

1.1. Límites

Comenzaremos escribiendo una definición formal en términos matemáticos, la cual nos permitirá nombrar un teorema más común para definir si un límite existe o no.

Definición. 1 (Límite:). Sean $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función, decimos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si y solo si para toda sucesión $\langle x_n \rangle$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. [1]

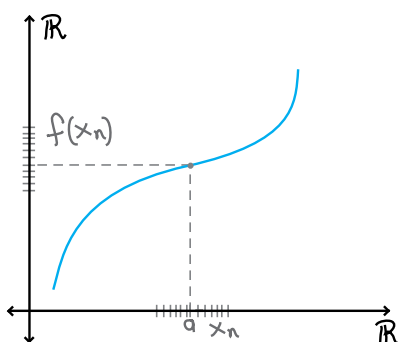


Figura 1.1: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Teorema. 1 (Límite:). Sea f una función definida en cada número x de un intervalo abierto que contiene a a , excepto posiblemente en el mismo número a .

El límite de $f(x)$ cuando x tiene a a es L , donde $L \in \mathbb{R}$ (es decir existe), lo cual, se denota



como:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si la siguiente proposición es verdadera: Para todo $\varepsilon > 0$, (no importa que tan pequeño sea), existe un $\delta > 0$ tal que si:

$$0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

En otras palabras, este teorema establece que los valores de $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x tiende al número a si la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeño como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a .

Utilizando el teorema anterior podemos demostrar sencillamente las siguientes propiedades:

Teorema. 2 (Propiedades de los límites. [4]). Sea x un número real cualquiera, a un número fijo y f, g dos funciones dependientes de la variable x , entonces:

- ★ $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ donde x es la función idéntica.
- ★ $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ donde c es una constante.
- ★ $\lim_{x \rightarrow a} mx + b = ma + b$ donde $mx + b$ es la función lineal.
- ★ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ entonces:
 - a. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
 - b. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = LM$
 - c. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ con $M \neq 0$
 - d. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$
 - e. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- ★ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ con $a \neq 0$

1.1.1. Límite de funciones polinómicas y racionales

Una *función polinómica* es una suma finita de la variable x en diferentes potencias, cada potencia esta multiplicada por un coeficiente reales. Todos polinomios están definidos para cualquier número real.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$, para todo i entero positivo.



El número n identifica el grado del polinomio. Algunas funciones polinómicas reciben un nombre especial según el grado del polinomio: Ver tabla ??

Nombre del polinomio		
<i>Función constante</i>	$f(x) = c$	es un monomio de grado 0
<i>Función lineal</i>	$f(x) = mx + b$	es un binomio del primer grado
<i>Función cuadrática</i>	$f(x) = ax^2 + bx + c$	es un trinomio del segundo grado
<i>Función cubica</i>	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	es un cuatrinomio de tercer grado
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Función general	$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$	es un polinomio de grado n

Ejemplos. 1.

- $\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 4 = 2(3) + 4 = 6 + 4 = 10$
- $\lim_{x \rightarrow -3} -3x^2 + 5x = -3(-3)^2 + 5(-3) = -3(9) - 15 = -27 - 15 = -42$
- $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 1^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$
- $\lim_{x \rightarrow -1} 8x^4 + 7x^3 + 6x + 5 = 8(-1)^4 + 7(-1)^3 + 6(-1) + 5 = 8 - 7 - 6 + 5 = 0$

Una *función racional* es una función que puede ser expresada de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y x una variable real, siendo $q(x)$ distinto del polinomio nulo. Las funciones racionales están definidas o tienen su dominio definido en todos los valores de x que no anulen el denominador.

Ejemplos. 2.

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+4}{x} = \frac{2(3)+4}{3} = \frac{10}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-3x^2+5x}{x+1} = \frac{-3(-3)^2+5(-3)}{(-3)+1} = \frac{-42}{-2} = \frac{-42}{-2} = 21$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{2x+4} = \frac{(1)^3+3(1)^2+3(1)+1}{2(1)+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^4+7x^3+6x+5}{x-1} = \frac{8(-1)^4+7(-1)^3+6(-1)+5}{(-1)-1} = \frac{0}{-2} = 0$



Límite de funciones algebraicas

Una *función algebraica* es una función que se puede construir usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíz) a partir de polinomios. Automáticamente, cualquier función racional es una función algebraica.

1.1.2. Calcular límites indeterminados

Existen situaciones donde el límite de una función algebraica cuando tiende a un número a es *indeterminado*, esto sucede cuando $q(a) = 0$, es decir el denominador tiende a cero cuando x se aproxima a a , si esto sucede diremos que el límite es indeterminado y se aplica algún tipo de factorización para eliminar la indeterminación, y así poder calcular el límite de la función algebraica en la forma directa.

Ejemplos. 3.

1.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} \frac{\sqrt{3x} + 3}{\sqrt{3x} + 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x})^2 - 3^2}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 9}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{\sqrt{3x} + 3} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{3(3)} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x} - 3} \frac{(\sqrt[3]{x} - 3)^2}{(\sqrt[3]{x} - 3)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 27)(\sqrt[3]{x} - 3)^2}{(\sqrt[3]{x} - 3)^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)(\sqrt[3]{x} - 3)^2}{x - 3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9)(\sqrt[3]{x} - 3)^2 \\
&= (3^2 + 3(3) + 9)(\sqrt[3]{3} - 3)^2 = 27(0) = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^3 - 7x^2 - 18x - 8}{16 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1)(3x^2 - 10x - 8)}{(4 - x)(4 + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1)(3x - 12)(3x + 2)}{3(4 - x)(4 + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1)3(x - 4)(3x + 2)}{-3(x - 4)(4 + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1)(3x + 2)}{-(4 + x)} = \frac{(4 + 1)(3(4) + 2)}{-(4 + 4)} = \frac{5(14)}{-8} = -\frac{35}{4}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x} \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 9})^2 - (3)^2}{x(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 9) - 9}{x(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{0}{\sqrt{0 + 9} + 3} = \frac{0}{6} = 0
\end{aligned}$$

1.1.3. Límites laterales

Definición. 2. Escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



y decimos que el límite derecho de $f(x)$ cuando x tiende a a , o el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L , si podemos aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como queramos, escogiendo x lo bastante cerca de a pero mayor a a .

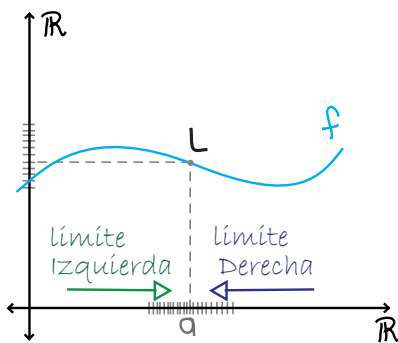


Figura 1.2: Límites laterales

Esta definición difiere de la primera solo en que x debe ser mayor que a . De manera análoga, si requerimos que x sea menor que a , obtenemos el *límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L* y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Teorema. 3 (*Límites Laterales*). El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ existen y son iguales a } L$$

Ejemplos. 4.

1. Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como la función cambia en $x = 1$, entonces estudiaremos los límites laterales de $h(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 4 - x^2 = 4 - 1^2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2 + x^2 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de $h(x)$ cuando x tiende a 1 existe y es igual a 3.



2. Digamos que $C(x)$ es la función en dólares del costo total de un pedido de x libras de un producto:

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1,8x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{Para entender}$$

como es el comportamiento de la función de costo tenemos que dibujarla:

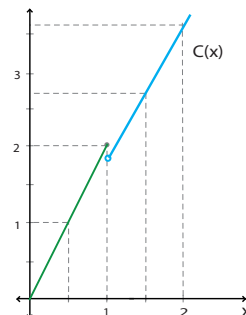


Figura 1.3: $C(x) = \text{costos}$

Gracias a la figura 1.3 y al tipo de función definida, nos damos cuenta que la función $C(x)$ sufre un rompimiento en $x = 1$, por lo tanto examinaremos el límite de la función por la izquierda y por la derecha en el punto $x = 1$ para decidir si existe o no.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} C(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} C(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 1,8x = 1,8(1) = 1,8 \end{aligned}$$

Si los límites laterales existen pero no son iguales, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} C(x)$ no existe.

3. Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por definición de valor absoluto tenemos que la función $g(x)$ puede escribirse como

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ahora estudiaremos los límites laterales de $h(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$



También notemos que $f(0) = 2$ pero los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 0 existe y es igual a 0 y no está definido en $x = 0$.

4. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$. Por definición de valor absoluto, tenemos:

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} = \begin{cases} \frac{(x-3)}{x-3} & \text{si } x-3 > 0 \\ \frac{-(x-3)}{x-3} & \text{si } x-3 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

Y los límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} -1 = -1 \end{aligned}$$

Si los límites laterales existen pero no son iguales, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

El siguiente teorema es otra propiedad adicional para determinar límites.

Teorema. 4.

i. Si $f(x) \leq g(x)$, cuando x está cerca de a y los límites de f y g existen a a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ii. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, cuando x está cerca de a y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Ejemplos. 5.

1. Si $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ para $0 \leq x \leq 2$, evalúe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Sea $g(x) = 3x$ y $h(x) = x^3 + 2$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3(1) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 2 = (1)^3 + 2 = 3$. Luego podemos aplicar el teorema anterior y concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$



2. Considere que $|g(x) - 2| \leq 3(x - 1)^2$, para todo x . Aplique el teorema anterior para determinar $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$. Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} -3(x - 1)^2 &\leq g(x) - 2 \leq 3(x - 1)^2 \\ -3(x^2 - 2x + 1) &\leq g(x) - 2 \leq 3(x^2 - 2x + 1) \\ -3x^2 + 6x - 3 &\leq g(x) - 2 \leq 3x^2 - 6x + 3 \\ -3x^2 + 6x - 1 &\leq g(x) \leq 3x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

Ahora calculamos el límite en toda la inecuación anterior

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} -3x^2 + 6x - 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - 6x + 5 \\ -3(1)^2 + 6(1) - 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \leq 3(1)^2 - 6(1) + 5 \\ -3 + 6 - 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \leq 3 - 6 + 5 \\ 2 &\leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \leq 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

3. Utilice el teorema anterior para probar que $\lim_{x \rightarrow 0} |x \sin \frac{1}{x}| = 0$. Apoye este hecho gráficamente. (*Ejercicio para el estudiante*)
4. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$. (*Ejercicio para el estudiante*)

1.1.4. Límite de funciones trascendentes

Una *función trascendente* es una función que no es algebraica. Es decir, que trasciende al álgebra en el sentido que no puede ser expresada en términos de una secuencia **finita** de operaciones algebraicas como la suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, es decir, funciones polinómicas o funciones racionales.[8] El conjunto de las funciones trascendentes incluye las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas.

Ejemplos. 6.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} e^x = e^3$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x + 1) = \ln(0) = 1$



$$3. \lim_{x \rightarrow 100} \log_{10} x = \log_{10}(100) = 2$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{e^1 - e^{-1}}{1} = e^1 - e^{-1}$$

Límite de funciones trigonométricas

El término función trascendente a menudo es utilizado para describir a las funciones trigonométricas, o sea, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, y $\csc(x)$. También las funciones hiperbólicas $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, y $\coth(x)$. Notemos que las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ el dominio es $(-\infty, \infty)$, (es decir, todos los reales) y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por lo tanto, para todos los valores de x , tenemos

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ Figura 1.4}, \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ Figura 1.5}$$

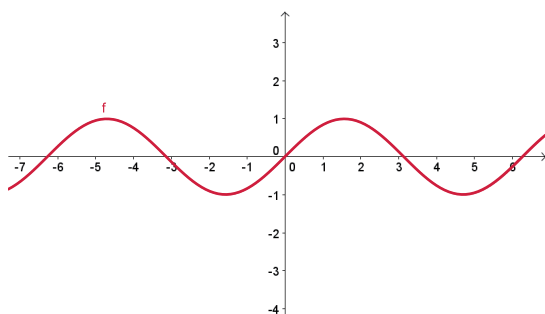


Figura 1.4: $f(x) = \sin x$

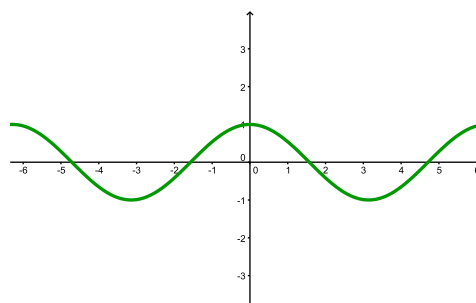


Figura 1.5: $g(x) = \cos x$

Para calcular límites trigonométricos solo hace falta conocer las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$ en detalle y las identidades trigonométricas: ver tabla 1.1

Ejemplos. 7.

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi = -1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 90} \sin^2 x - \sin x^2 = \sin^2 90 - \sin 90^2 = 1^2 - \sin 8100 =$$



$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$	$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$	$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
$\csc^2(x) = \cot^2(x) + 1$	$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	

Cuadro 1.1: Identidades trigonométricas

También, para estudiar funciones trigonométricas compuestas se considera el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Y observemos que $\frac{\sin x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero su límite existe y es igual a 1.

Teorema. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Demostración. Ejercicio para el estudiante. ◇

Ejemplos. 8.

1.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1} \frac{1}{\sin 5x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1} \frac{3x}{3x} \frac{1}{\sin 5x} \frac{1}{\frac{5x}{5x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{3x}{1} \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \frac{1}{5x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{3x}{5x} \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5}(1)(1)
 \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x} \frac{1}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = (1) \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{\sin x} \frac{1}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x} \frac{1}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \frac{1}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \cos x} = (1) \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{x^2} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x^2} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^2 x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 2(1)^2(1) = 2
\end{aligned}$$

1.1.5. Límite al infinito

Existen situaciones donde el límite de una función no tienda a ningún número, en cambio el límite crezca o decrezca infinitamente cuando x toma valores muy cercanos a a . Esto lo podemos definir de la siguiente forma:

Definición. 3. Sea f una función definida en cada número de un intervalo abierto I que contiene el número a , no necesariamente este definido en a .

- i.* Conforme x se aproxime a a , $f(x)$ *crece sin límite*, lo cual se escribe como: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si para todo número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } f(x) > N$$

Significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes eligiendo un x lo bastante cerca de a pero no igual a a .



- ii. Conforme x se aproxime a a , $f(x)$ decrece sin límite, lo cual se escribe como: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si para todo número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } f(x) < -N$$

Significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente pequeños eligiendo un x lo bastante cerca de a pero no igual a a .

Ejemplos. 9.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^3} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Teorema. 6. Si r es cualquier número positivo, entonces

$$\boxtimes \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$\boxtimes \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \end{cases}$$

Teorema. 7. Si a es cualquier número real, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ donde c es una constante diferente de cero, entonces:

$$\star \text{ Si } c > 0 \text{ y } f(x) \rightarrow 0 \text{ a través de valores positivos de } f(x), \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

$$\star \text{ Si } c > 0 \text{ y } f(x) \rightarrow 0 \text{ a través de valores negativos de } f(x), \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

$$\star \text{ Si } c < 0 \text{ y } f(x) \rightarrow 0 \text{ a través de valores positivos de } f(x), \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

$$\star \text{ Si } c < 0 \text{ y } f(x) \rightarrow 0 \text{ a través de valores negativos de } f(x), \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

También podríamos pensar en calcular límites de funciones, cuando x tienda a $\pm\infty$, es decir, x crezca o decrezca infinitamente.



Definición. 4. Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞) . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como deseemos, si escogemos un x suficientemente grande o pequeño.

Primero que todo estudiemos el límite al infinito de dos diferentes tipos de funciones: $f(x) = 2x^2 + 3$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Dicho estudio lo realizaremos construyendo tablas de valores para cada función.

x	$f(x) = 2x^2 + 3$
10	203
100	20003
1000	2000003
10000	200000003
$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 1.2: Comportamiento de f

x	$g(x) = \frac{1}{x}$
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001
$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 1.3: Comportamiento de g

Por lo tanto, de las tablas 1.2 y 1.3, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 + 3$ crece sin límite y que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ tiende o es igual a cero.

Teorema. 8. Sea n cualquier entero positivo y a un número real cualquiera, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

Otra forma para calcular límites de este tipo, es decir, cuando x tienda a ∞ , se divide numerador y denominador por la mayor potencia que tenga x en el denominador y se aplica el teorema anterior. Por ejemplo:

Ejemplos. 10.

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x + 5\sqrt{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{2x + 5\sqrt{x} - 3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{5\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{x}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}} = \frac{3}{2 + 0 - 0} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{\sqrt{3}x^2+1} \right)^2 &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{\sqrt{3}x^2+1} \right)^2 \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{3}x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \right)^2 \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\sqrt{3} + \frac{1}{x^2}} \right)^2 = \left(\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} \right)^2 = \left(\frac{0+1}{\sqrt{3}+0} \right)^2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-2} - 4x^{-4})^{-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x^4 - 4x^2}{x^6}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6}{x^4 - 4x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^6}{x^4}}{\frac{x^4 - 4x^2}{x^4}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{\infty}{1-0} = \infty
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + x^4 + 8}{25x + 27} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x + x^4 + 8}{x}}{\frac{25x + 27}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x} + \frac{x^4}{x} + \frac{8}{x}}{\frac{25x}{x} + \frac{27}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + x^3 + \frac{8}{x}}{25 + \frac{27}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 25 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27}{x}} = \frac{5 + \infty + 0}{25 + 0} = \frac{\infty}{25} = \infty
\end{aligned}$$

1.2. Continuidad

Una de las aplicaciones útiles del límite de una función en un cierto punto, es el estudio de la continuidad de la misma, a continuación daremos la definición de continuidad mediante límites.

Definición. 5 (Continuidad y Discontinuidad). La función f es *continua* en el punto $x = a$ si y solo si satisface las tres condiciones siguientes:

1. La función en el punto a este definida, es decir, que $f(a) \in \mathbb{R}$



2. El límite de la función en el punto a exista, en otras palabras, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ exista
3. Que el límite de la función sea igual a la función evaluada en el punto a , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = L$$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumple en a , entonces se dice que la función f es **discontinua** en a .

1.2.1. Continuidad de la función compuesta, y en un intervalo

Definición. 6. La función f es continua desde la derecha en un número a si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Y f es continua desde izquierda en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Definición. 7. La función es continua en un intervalo si es continua en todo número del intervalo.

Ejemplos. 11.

1. En cada entero n , la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es continua desde la derecha pero discontinua desde la izquierda porque

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n = f(n) \text{ pero } \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \neq f(n)$$

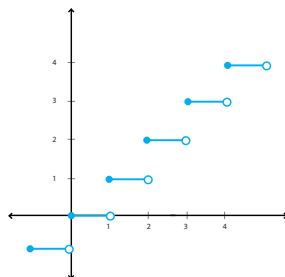


Figura 1.6: Función parte entera

2. Un mayorista distribuye un producto que se vende por libra (o fracción de libra) cobra \$2 por libra si se ordena 10 o menos libras. Si se ordenan más de 10 libras, el mayorista cobra \$20 más \$1.40 por cada libra que exceda de las 10. Por tanto, si se compran x libras por un costo total de $C(x)$ dólares, entonces $C(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 10$ y $C(x) = 20 + 1,4(x - 10)$ si $x > 10$.

Para entender como es el comportamiento de la función de costo tenemos que dibujarla:

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 20 + 1,4(x - 10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

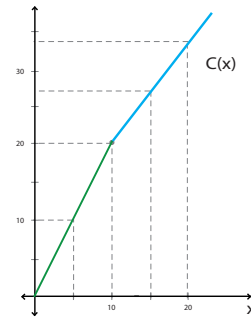


Figura 1.7: Función Costo $C(x)$

Para concluir, decimos que la función costo $C(x)$ es continua en $x = 10$, es decir, los costos continúan y no se rompe en dicho punto, solamente disminuyen los costos comparados con los costos de 10 o menos libras.

3. Demuestre que la función $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

Si $-1 < a < 1$ entonces, al aplicar las propiedades de límites tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (1 - \sqrt{1 - x^2}) \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{1 - x^2} \\ &= 1 - \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (1 - x^2)} = 1 - \sqrt{1 - a^2} = f(a) \end{aligned}$$

Gracias a la definición 4, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares hacen ver que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 - \sqrt{1 - (-1)^2} = 1 = f(-1) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - \sqrt{1 - 1^2} = 1 = f(1)$$

de modo que f es continua desde la derecha en -1 y continua desde la izquierda en 1 . por tanto, según la definición 6, f es continua sobre $[-1, 1]$.

4. Explique por qué la función $h(x)$ es discontinua en el punto $a = -1$. Grafique la función.

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$



Teorema. 9. Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a : $f \pm g$, fg , $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$, cf

Teorema. 10. Tipos de funciones continuas en todo su dominio:

★ Funciones polinómicas

★ Funciones racionales

★ Funciones raíz

★ Funciones trigonométricas

★ Funciones trigonométricas inversas

★ Funciones exponenciales

★ Funciones logarítmicas

Teorema. 11. Si f es continua en b y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

Teorema. 12. Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a .

1.3. Otras aplicaciones

1.3.1. Asíntotas verticales y horizontales

Esta aplicación es muy útil para estudiar, analizar y dibujar curvas $y = f(x)$.

Definición. 8. La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si se cumple por lo menos alguna de las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{c|c|c} \lim_{x \rightarrow a} = \infty & \lim_{x \rightarrow a^-} = \infty & \lim_{x \rightarrow a^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} = -\infty & \lim_{x \rightarrow a^-} = -\infty & \lim_{x \rightarrow a^+} = -\infty \end{array}$$

Definición. 9. La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si se cumple por lo menos alguna de las siguientes proposiciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = L \quad \Bigg| \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} = L$$



1.3.2. Pendiente de la recta tangente

Si a una curva $y = f(x)$ le queremos hallar la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$, tenemos que considerar un punto cercano de P , es decir $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta secante PQ a la curva $y = f(x)$

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

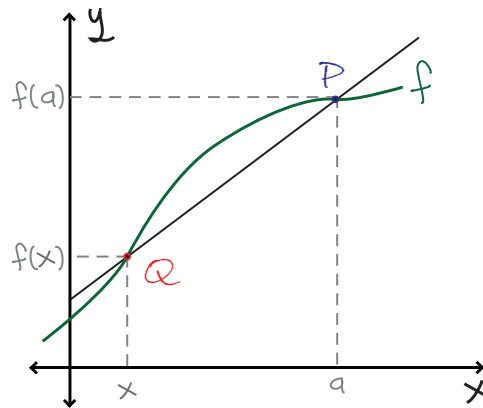


Figura 1.8: Recta secante a $f(x)$

Luego, acercamos Q a P a lo largo de la curva, haciendo que x tienda a a (ver figura 1.8). Si m_{PQ} tiende a un número m , entonces definimos la *recta tangente* como la recta que pasa por P con pendiente m .

Definición. 10. La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P cuya pendiente es

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

1.3.3. Velocidad

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con la ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento del objeto respecto al origen, en el instante t . La función f que describe el movimiento se conoce como función posición del objeto. En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. La velocidad promedio en este periodo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



Supongamos ahora que calculamos las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, hacemos que h tienda a 0. Ahora, definimos la *velocidad* o *velocidad instantáneo* $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

Definición. 11.

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente.

1.4. Ejercicios

1. Determine el límite (si existe) por sustitución directa.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{24x^2 - 8x + 2}{12x^2 - 2x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 1}$

2. Determine el límite (si existe) por factorización:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - \frac{1}{x^2}}{x - 1 + \frac{2}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{8}} \frac{40x^2 + 73x + 30}{8x^2 - 3x - 5}$

3. Calcule el límite (si existe):

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 9x - 6}{x^3 + 1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{81 - x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x^{-4})^{-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+4} - x - x^4}{x^6 + 7x - \sqrt{5}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - 7x^3}}{3x^2 - 2x^5}$



4. Determine si la función es continua, en el punto dado.

a) $f(x) = 5x^2 + 8; x = 1.$

b) $f(x) = 5x^3 - 5x + 1; x = 2.$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 5}; x = 1.$

5. Determine si la función es continua en el punto indicado; si no lo es, identifique el tipo de discontinuidad y de ser posible, redefina la función:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}; x = -1.$

b) $f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1-x^2}; x = 1.$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; x = 1.$

6. Determine si la función es continua en todos los reales y esboce su gráfica:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

7. Use la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función $g(x)$ es continua en el número $a = 4$

$$g(x) = \frac{x+1}{2x^2-1}$$

8. Con la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$.

9. Si en la Luna se dispara una flecha hacia arriba con una velocidad de $58m/s$, su altura (en metros) después de t segundos se expresa con $H = 58t - 0,83t^2$. [3]

a) Encuentre la velocidad de la flecha después de $1s$

b) Halle la velocidad de la flecha cuando $t = a$

c) ¿ Cuándo chocará la flecha contra la Luna?

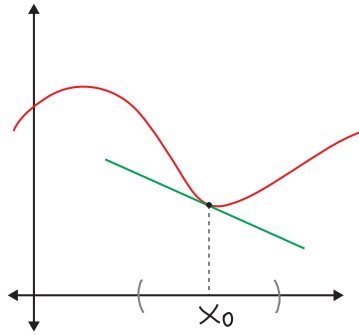


- d)* ¿Con qué velocidad chocará contra la Luna?
10. *a)* Halle la pendiente de la tangente a la parábola $y = 1 + x + x^2$, en el punto donde $x = a$.
- b)* Encuentre las pendientes de las rectas tangentes en los puntos cuyas coordenadas son *i)* -1, *ii)* y *iii)* 1.
- c)* Grafique la curva y las tres tangentes en un plano común.



CAPÍTULO 2

Cálculo Diferencial



La derivada es la pendiente de la recta tangente en x_0 , también es una transformación lineal $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que aproxima a f en x_0 . [6]

Figura 2.1: La recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$

2.1. Concepto básico

Sea f una función definida por lo menos, en un intervalo abierto (a, b) del eje x . elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

donde el número Δx puede ser positivo o negativo (pero no cero), tal que $x + \Delta x$ pertenezca también a (a, b) . El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x + \Delta x$. El cociente representa la variación media de f en el intervalo que une x a $x + \Delta x$. Para definir la derivada de la función f hay que estudiar el límite del cociente diferencial 2.1.



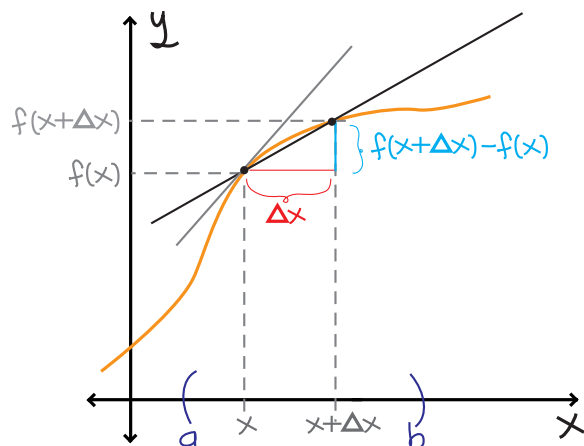


Figura 2.2: Cociente diferencial

Y si el límite del cociente diferencial existe entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$ (se lee f prima de x). Por lo tanto la definición de $f'(x)$ puede establecerse de la siguiente manera:

Definición. 12. La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

con tal que el límite existe. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x .

Ya podemos empezar a estudiar el límite del cociente diferencial 2.1 de algunas funciones polinómicas para decir que hemos calculado la derivada de esos polinomios mediante la definición 12.

Ejemplos. 12.

1. Si $f(x) = 2$, entonces su derivada es

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. Si $g(x) = x$, entonces su derivada es

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$



3. Si $h(x) = 2x^2$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 2x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h = 4x \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = x^2 + 2x + 1$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} t'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2 = 2x + 2 \end{aligned}$$

Lo anterior nos sugiere buscar un tipo de fórmulas o reglas para calcular derivas sin tener que resolver ese límite. Empecemos con la función potencia $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y calculemos su derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

En algebra elemental podemos utilizar el binomio de *Newton* para reemplazar la expresión $(x+h)^n$ o también la identidad $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^k x^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$



Ejemplos. 13.

1. Si $f(x) = x^4$, entonces su derivada es $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$
2. Si $g(x) = x^{12}$, entonces su derivada es $g'(x) = (12)x^{12-1} = 12x^{11}$
3. Si $h(x) = x^{1000}$, entonces su derivada es $h'(x) = (1000)x^{1000-1} = 1000x^{999}$
4. Si $t(x) = x^{667}$, entonces su derivada es $t'(x) = (667)x^{667-1} = 667x^{666}$

2.2. Derivada de funciones algebraicas

A continuación determinaremos todas las reglas de diferenciabilidad mediante su definición.

2.2.1. Regla de la constante por la función

Sea $f(x) = cg(x)$, donde c es un constante cualquiera. Entonces la derivada de f es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = cg'(x)$$

Ejemplos. 14.

1. Si $f(x) = 3x^4$, entonces su derivada es $f'(x) = 3(4)x^{4-1} = 12x^3$
2. Si $g(x) = 12x^{12}$, entonces su derivada es $g'(x) = 12(12)x^{12-1} = 144x^{11}$
3. Si $h(x) = 2x^{1000}$, entonces su derivada es $h'(x) = 2(1000)x^{1000-1} = 2000x^{999}$
4. Si $t(x) = 3x^{667}$, entonces su derivada es $t'(x) = 3(667)x^{667-1} = 2001x^{666}$

2.2.2. Regla de la suma de dos funciones

Las propiedades relativas de los límites en el capítulo anterior nos ayudaran a calcular la derivada de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones. Sean f y g dos



funciones cualesquiera definidas en un intervalo común. Entonces la derivada de $f + g$ está dado por:

$$\begin{aligned}
 (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

Ejemplos. 15.

1. Si $f(x) = 3x^2 + x + 1$, entonces su derivada es

$$f'(x) = 3(2)x^{2-1} + (1)x^{1-1} = 6x + 1$$

2. Si $g(x) = x^3 - 1$, entonces su derivada es $g'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

3. Si $h(x) = 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$, entonces su derivada es

$$h'(x) = 4(4)x^{4-1} + 3x^{3-1} - 2(2)x^{2-1} = 16x^3 + 3x^2 - 4x$$

4. Si $t(x) = 30x^5 - 20x^3 - 10x$, entonces su derivada es

$$t'(x) = 30(5)x^{5-1} - 20(3)x^{3-1} - 10(1)x^{1-1} = 150x^4 - 60x^2 - 10$$

2.2.3. Regla del producto de dos funciones

La derivada de la resta de dos funciones, es análoga a la anterior. Ahora derivemos el producto de f y g definidos anteriormente.



$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= g(x+0)f'(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Para poder realizar estos ejemplos de una forma más rápida, utilizaremos las formulas vistas anteriormente y efectuaremos calculos directamente.

Ejemplos. 16.

1. Si $f(x) = (3x^2 + x + 1)(x^3 - 1)$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (6x + 1)(x^3 - 1) + (3x^2 + x + 1)(3x^2) \\
&= 6x^4 - 6x + x^3 - 1 + 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 \\
&= 15x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 1
\end{aligned}$$

2. Si $g(x) = (4x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)(30x^5 - 20x^3 - 10x)$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (16x^3 + 3x^2 - 4x)(30x^5 - 20x^3 - 10x) + (4x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)(150x^4 - 60x^2 - 10) \\
&= 180x^8 - 320x^6 - 160x^4 + 90x^7 - 60x^5 - 30x^3 - 120x^6 + 80x^4 + 40x^2 + 600x^8 - 240x^6 - 40x^4 + \\
&\quad + 150x^7 - 60x^5 - 10x^3 - 300x^6 + 120x^4 - 20x^2 + 150x^4 - 60x^2 - 10 \\
&= 780x^8 + 240x^7 - 980x^6 - 120x^5 + 310x^4 - 40x^3 - 80x^2 - 10
\end{aligned}$$

3. Si $h(x) = (3x^4 + x)(x^2 - 1)$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (12x^3 + 1)(x^2 - 1) + (3x^4 + x)(2x) \\
&= 12x^5 - 12x^3 + x^2 - 1 + 6x^5 + 2x^2 \\
&= 18x^5 - 12x^3 + 3x^2 - 1
\end{aligned}$$



4. Si $t(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 1)$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x)(x^3 - 1) + (x^2 - 1)(3x^2) \\ &= 2x^4 - 2x + 3x^4 - 3x^2 \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2x \end{aligned}$$

2.2.4. Regla del cociente de dos funciones

Antes de abordar la derivada de un cociente, estudiaremos un caso particular. Sea la función $\frac{1}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$, entonces la derivada es

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g(x)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(g(x+h) - g(x))}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\ &= -g'(x) \frac{1}{g(x+0)g(x)} = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

Entonces para determinar la derivada de un cociente de funciones $\frac{f}{g}$, expresamos el cociente como un producto, es decir, $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ y aplicamos la regla del producto obtenida anteriormente.

$$\begin{aligned} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$



Ejemplos. 17.

1. Si $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^3-1}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x+1)(x^3-1) - (3x^2+x+1)(3x^2)}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 6x + x^3 - 1 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{-3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3-1)^2} \end{aligned}$$

2. Si $g(x) = \frac{4x^4+x^3}{30x^5-10x}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(16x^3+3x^2)(30x^5-10x) - (4x^4+x^3)(150x^4-10)}{(30x^5-10x)^2} \\ &= \frac{180x^8 - 160x^4 + 90x^7 - 30x^3 - 600x^8 + 40x^4 - 150x^7 + 10x^3}{(30x^5-10x)^2} \\ &= \frac{-420x^8 - 60x^7 - 120x^4 - 20x^3}{(30x^5-10x)^2} \end{aligned}$$

3. Si $h(x) = \frac{3x^4+x}{x^2-1}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(12x^3+1)(x^2-1) - (3x^4+x)(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{12x^5 - 12x^3 + x^2 - 1 - 6x^5 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{6x^5 - 12x^3 - 3x^2 - 1}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x)(x^3-1) - (x^2-1)(3x^2)}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^3-1)^2} \end{aligned}$$



2.3. Derivada de funciones compuestas

Teorema. 13. (Regla de la cadena) Sean $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in D_1$ y $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(D_1) \subset D_2$, diferenciable en $f(x) \in D_2$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en $x \in D_1$, entonces

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} \cdot \frac{f(\xi) - f(x)}{f(\xi) - f(x)} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{f(\xi) - f(x)} \cdot \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{f(\xi) - f(x)} \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{✖} \end{aligned}$$

Tenemos un problema: Puede suceder que $f(\xi) = f(x)$

Existe solución: Utilicemos una función auxiliar.

$$G(\eta) = \begin{cases} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} & \text{si } \eta \neq y \\ \lim_{\eta \rightarrow y} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} = g'(y) & \text{si } \eta = y \end{cases}$$

Ya que g es diferenciable en D_2 . En particular si $y = f(x)$ $\eta = f(\xi)$, el límite existe. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{✖} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{f(\xi) - f(x)} \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} &= \lim_{\xi \rightarrow x} G(f(\xi)) \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

◇

Ejemplos. 18.

1. Si $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}-1}(2x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1) \\ &= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \end{aligned}$$



2. Si $g(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2+9x-6}{x^3+1}}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2+9x-6}{x^3+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{(6x+9)(x^3+1) - (3x^2+9x-6)(3x^2)}{(x^3+1)^2} \\
 &= \frac{1}{3 \left(\frac{3x^2+9x-6}{x^3+1} \right)^{\frac{2}{3}}} \frac{6x^4+6x+9x^3+9-9x^4-27x^3+18x^2}{(x^3+1)^2} \\
 &= \frac{1}{3 \frac{(3x^2+9x-6)^{\frac{2}{3}}}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}} \frac{-3x^4-18x^3+9+18x^2+6x}{(x^3+1)^2} \\
 &= \frac{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}{3(3x^2+9x-6)^{\frac{2}{3}}} \frac{-3x^4-18x^3+9+18x^2+6x}{(x^3+1)^2} \\
 &= \frac{(x^3+1)^{-\frac{4}{3}}}{3(3x^2+9x-6)^{\frac{2}{3}}} (-3x^4-18x^3+9+18x^2+6x)
 \end{aligned}$$

3. Si $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{0\sqrt{x^2-1} - (1)\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-1} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}}{x^2-1} \\
 &= \frac{-1}{2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = (x^2-1)^2(x^3-1)^3$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned}
 t'(x) &= 2(x^2-1)(2x)(x^3-1)^3 + (x^2-1)^2(3x^2) \\
 &= (4x^3-4x)(x^3-1)^3 + (x^4-2x^2-1)(3x^2) \\
 &= (4x^3-4x)(x^9-3x^6+3x^3-1) + 3x^6-6x^4-3x^2 \\
 &= 4x^{12}-12x^9+12x^6-4x^3-4x^{10}-12x^7-10x^4-4x+3x^6-6x^4-3x^2 \\
 &= 4x^{12}-4x^{10}-12x^9-12x^7+15x^6-16x^4-4x^3-3x^2-4x
 \end{aligned}$$

Ejemplos. 19.



1. Si $f(x) = (x^2 - 1)^3$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 - 1)^2 \\ &= 3(x^4 - 2x^2 - 1) \\ &= 3x^4 - 6x^2 - 3 \end{aligned}$$

2. Si $g(x) = \sqrt{2 - 9x}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(2 - 9x)^{-\frac{1}{2}}(-9) \\ &= \frac{1}{2(2 - 9x)^{\frac{1}{2}}}(-9) \\ &= \frac{-9}{2\sqrt{2 - 9x}} \end{aligned}$$

3. Si $h(x) = \frac{(3x^2 - 5x + 1)(x^4 + 8)}{9x^2 - 2}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{[(6x - 5)(x^4 + 8) + (3x^2 - 5x + 1)(4x^3)](9x^2 - 2) - (3x^2 - 5x + 1)(x^4 + 8)(18x)}{(9x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{[6x^5 + 48x - 5x^4 - 40 + 12x^5 - 10x^4 + 4x^3](9x^2 - 2) - (3x^2 - 5x + 1)(18x^5 + 144x)}{(9x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{(18x^5 - 15x^4 + 4x^3 + 48x - 40)(9x^2 - 2) - 54x^7 + 432x^3 - 90x^6 - 720x^2 + 18x^5 + 144x}{(9x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{162x^7 - 135x^6 + 36x^5 + 432x^3 - 360x^2 - 36x^5 + 30x^4 - 8x^3 - 96x + 80 - 54x^7 + 432x^3 - 90x^6 - 720x^2 + 18x^5 + 144x}{(9x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{108x^7 - 225x^6 + 18x^5 + 30x^4 + 856x^3 - 1080x^2 + 144x + 80}{(9x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = [(2x + 1)^{10} + 1]^{10}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} t'(x) &= 10[(2x + 1) + 1]^9(10(2x + 1)^9)(2) \\ &= 200[(2x + 1) + 1]^9(2x + 1)^9 \end{aligned}$$

2.4. Derivadas de funciones trascendentes

Comencemos determinando las derivadas de las función trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ utilizando la definición de derivada:



$$\begin{aligned}
\frac{d(\sin(x))}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(\cos(x))}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(h)\sin(x) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(h)\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)\sin(x)}{h} \\
&= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

Luego para encontrar las derivadas de las otras funciones trigonométricas, utilizaremos las reglas y no la definición:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\tan(x))}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} = \left(\frac{1}{\cos(x)} \right)^2 = \sec^2(x)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{d(\cot(x))}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \frac{(-\sin(x))\sin(x) - \cos(x)(\cos(x))}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-1}{\sin^2(x)} = - \left(\frac{1}{\sin(x)} \right)^2 = -\csc^2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(\sec(x))}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos(x)} \right) = \frac{(0)\cos(x) - (1)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sec(x) \tan(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(\csc(x))}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin(x)} \right) = \frac{(0)\sin(x) - (1)(\cos(x))}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-1}{\sin(x)} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\csc(x) \cot(x)
\end{aligned}$$

Para concluir escribimos una tabla de las derivadas trigonométricas y las derivadas trigonométricas inversas queda de ejercicio para el docente y los estudiantes:

Ejemplos. 20.

1. Si $f(x) = x^2 \sin(x)$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \sin(x) + x^2 \cos(x) \\
&= x(2 \sin(x) + x \cos(x))
\end{aligned}$$



$f(x)$	$f'(x)$	$f^{-1}(x)$	$(f^{-1})'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sec(x)$	$\sec(x) \tan(x)$	$\sec^{-1}(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$	$\cot^{-1}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\csc(x)$	$-\cot(x) \csc(x)$	$\csc^{-1}(x)$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Cuadro 2.1: Derivadas trigonométricas y derivadas trigonométricas inversa

2. Si $g(x) = 4 \sec^2(x)$, entonces su derivada es;

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4(2 \sec(x)) \sec(x) \tan(x) \\ &= 8 \sec^2(x) \tan(x) \end{aligned}$$

3. Si $h(x) = \frac{\cos(x)}{\csc(x)}$, entonces su derivada es;

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(-\sin(x)) \csc(x) - \cos(x)(-\cot(x) \csc(x))}{\csc^2(x)} \\ &= \frac{(-\sin(x)) \frac{1}{\sin(x)} - \cos(x) \left(-\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \frac{1}{\sin(x)} \right)}{\frac{1}{\sin^2(x)}} \\ &= \frac{\left(-1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \right)}{\frac{1}{\sin^2(x)}} \\ &= \frac{-\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\frac{1}{\sin^2(x)}} \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = \sin(\sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{\sin(x)}$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} t'(x) &= \cos(\sqrt[3]{x}) \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} (\sin(x))^{-\frac{2}{3}} \cos(x) \\ &= \frac{1}{3} (\cos(\sqrt[3]{x}) x^{-\frac{2}{3}} + (\sin(x))^{-\frac{2}{3}} \cos(x)) \end{aligned}$$



Otro ejemplo de funciones trascendentales es la exponencial o función potencia y su función inversa, que en este caso sería el logaritmo. Sea $y = a^x$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log(a) \end{aligned}$$

Ejemplos. 21.

1. Si $f(x) = e^x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = e^x \log(e) = e^x(1) = e^x$$

2. Si $h(x) = e^{\sqrt[3]{\sin(x^2)}}$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\sqrt[3]{\sin(x^2)}} \frac{1}{3} (\sin(x^2))^{-\frac{2}{3}} (\cos(x^2))(2x) \\ &= \frac{2x(\cos(x^2))}{3} (\sin(x^2))^{-\frac{2}{3}} e^{\sqrt[3]{\sin(x^2)}} \end{aligned}$$

3. Si $t(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{x+1}}$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{e^{x^2}(2x)e^{x+1} - e^{x^2}e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} \\ &= \frac{2xe^{x^2+x+1} - e^{x^2+x+1}}{e^{2(x+1)}} \\ &= \frac{e^{x^2+x+1}(2x - 1)}{(e^{x+1})^2} \\ &= \frac{e^{x^2}e^{x+1}(2x - 1)}{(e^{x+1})^2} \\ &= \frac{e^{x^2}(2x - 1)}{e^{x+1}} \end{aligned}$$



4. Si $g(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} + e^{x^2+\sin(x)}$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{(1)(x-1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} \right) + e^{x^2+\sin(x)}(2x + \cos(x)) \\ &= e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) + e^{x^2+\sin(x)}(2x + \cos(x)) \end{aligned}$$

2.5. Derivadas de una función inversa

Como solo nos hace falta saber de que forma puedo determinar la derivada de una función inversa, para así encontrar la derivada de $g(x) = \log_a(x)$. Entonces definamos una función cualquiera $f^{-1}(x) = y$ y por propiedades de composición de funciones tenemos:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= y \\ f(f^{-1}(x)) &= f(y) \\ x &= f(y) \end{aligned}$$

Apliquemos la regla de la cadena para derivar la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 1 &= f'(y)y' \\ \frac{1}{f'(y)} &= y' \\ \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} &= (f^{-1}(x))' \end{aligned}$$

Ejemplos. 22.

1. Si $t(x) = \arcsin(\sqrt{x}) + (\sin(x))^{-1}$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + (-1)(\sin(x))^{-2} \cos(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$



2. Si $g(x) = 4 \sec^{-1}(x^2 + 1)$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4 \left(-\frac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \right) 2x \\ &= -\frac{8x}{1 + (x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

3. Si $f(x) = x^2 \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2} \frac{(1)(x-1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} \\ &= 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{x^2}{1 + \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}} \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} \\ &= 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{x^2}{\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x-1)^2}} \frac{-2}{(x-1)^2} \\ &= 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{x^2}{\frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}} \frac{-2}{(x-1)^2} \\ &= 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{x^2(x-1)^2}{2x^2 + 2} \frac{-2}{(x-1)^2} \\ &= 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{-2x^2}{x^2 + 1} = 2x \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{x^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

4. Si $h(x) = \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces su derivada es:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \sqrt{1-x^2} - \arccos(x) \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)}{(\sqrt{1-x^2})^2} \\ &= \frac{-1 + \frac{1}{2} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{\frac{-2\sqrt{1-x^2} + \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{(1-x^2)(\arccos(x) - 2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1-x^2}(\arccos(x) - 2\sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

2.6. Derivada de la función implícita

Las funciones también se pueden clasificar en dos tipos: *funciones explícitas* y *funciones implícitas*.



Una función está escrita en forma explícita cuando una variable cualquiera esta totalmente dependiente de otra variable, ejemplos de derivadas explícitas son todos los mostrados en las secciones 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5.

Por lo contrario una función está escrita en forma implícita cuando la variable dependiente no está despejada. Para obtener la derivada de una función implícita se emplean las mismas fórmulas y las mismas reglas de derivación estudiadas hasta el momento. Supongamos que y depende de x , entonces debemos tener cuidado al momento de derivar a y , su derivada sería $y' = \frac{dy}{dx}$ porque la función implícita se está derivando con respecto a x .

Ejemplos. 23.

1. Hallar y' , dado que $x^2 - xy + y^2 = 3$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) &= \frac{d}{dx}(3) \\ 2x - (y + x \frac{dy}{dx}) + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2x - y - xy' + 2yy' &= 0 \\ -xy' + 2yy' &= y - 2x \\ y'(-x + 2y) &= y - 2x \\ y' &= \frac{y - 2x}{-x + 2y}\end{aligned}$$

2. Encuentre la derivada implícita de la ecuación $\ln(xy) + 5x = 30$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln(xy) + 5x) &= \frac{d}{dx}(30) \\ \frac{d}{dx}(\ln(xy)) + \frac{d}{dx}(5x) &= 0 \\ \frac{1}{xy} \frac{d}{dx}(xy) + 5 &= 0 \\ \frac{1}{xy}(y + xy') + 5 &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} &= -5 \\ \frac{y'}{y} &= -5 - \frac{1}{x} \\ y' &= -5y - \frac{y}{x}\end{aligned}$$



3. Determine la derivada implícita de la ecuación $e^{xy} + x \sin(y) = x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{xy} + x \sin(y)) &= \frac{d}{dx}(x) \\ e^{xy}(y + xy') + \sin(y) + x(\cos(y)y') &= 1 \\ xy'e^{xy} + x(\cos(y)y') &= 1 - \sin(y) - ye^{xy} \\ y'(xe^{xy} + x \cos(y)) &= 1 - \sin(y) - ye^{xy} \\ y' &= \frac{1 - \sin(y) - ye^{xy}}{xe^{xy} + x \cos(y)}\end{aligned}$$

4. Hallar y' , dado que $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(0) \\ (2xy + x^2\frac{dy}{dx}) - (y^2 + x\frac{d}{dx}(y^2)) + 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2xy + x^2y' - y^2 - x2yy' + 2x + 2yy' &= 0 \\ x^2y' - x2yy' + 2yy' &= y^2 - 2xy - 2x \\ y'(x^2 - x2y + 2y) &= y^2 - 2xy - 2x \\ y' &= \frac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - x2y + 2y}\end{aligned}$$

Ahora si determinemos al derivada de $y = g(x) = \log_a(x)$, entonces

$$\begin{aligned}y &= \log_a(x) \\ a^y &= a^{\log_a(x)} \\ a^y &= x\end{aligned}$$

Apliquemos la regla de la cadena para derivar la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}(a^y)' &= (x)' \\ a^y \log(a)y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{x \log(a)}\end{aligned}$$

La fórmula de derivación de la función logaritmo junto con las propiedades de la función logaritmo y la derivada implícita nos permiten encontrar la derivada de funciones algebraicas complejas:



Ejemplos. 24.

1. Si $f(x) = \frac{(5x+4)^2\sqrt{x+9}}{(2x-5)^3}$, entonces para determinar su derivada apliquemos la propiedades de logaritmo:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(5x+4)^2\sqrt{x+9}}{(2x-5)^3} \\ \log(y) &= \log\left(\frac{(5x+4)^2\sqrt{x+9}}{(2x-5)^3}\right) \\ \log(y) &= \log\left((5x+4)^2\sqrt{x+9}\right) - \log((2x-5)^3) \\ \log(y) &= \log(5x+4)^2 + \log(x+9)^{\frac{1}{2}} - \log((2x-5)^3) \\ \log(y) &= 2\log(5x+4) + \frac{1}{2}\log(x+9) - 3\log(2x-5) \end{aligned}$$

Apliquemos la regla de la cadena para derivar la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}y' &= 2\frac{1}{5x+4}5 + \frac{1}{2}\frac{1}{x+9} - 3\frac{1}{2x-5}2 \\ y' &= \left(\frac{10}{5x+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+9} - \frac{12x}{2x-5}\right) \frac{(5x+4)^2\sqrt{x+9}}{(2x-5)^3} \end{aligned}$$

2. Si $h(x) = \ln(\ln(x^2+1))$, entonces su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\ln(x^2+1)} \frac{1}{x^2+1} (2x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2+1)} \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

3. Si $t(x) = \ln(\sqrt[3]{1+\sin^2(x^2)})$, entonces antes de derivar apliquemos propiedades de logaritmos:

$$t(x) = \frac{1}{3} \ln(1+\sin^2(x^2))$$

Apliquemos la regla de la cadena para derivar la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{1}{3} \frac{1}{1+\sin^2(x^2)} (2\sin(x^2))(2x) \\ &= \frac{4}{3} \frac{x\sin(x^2)}{1+\sin^2(x^2)} \end{aligned}$$



4. Si $g(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+1}}$, entonces antes de derivar apliquemos propiedades de logaritmos:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\ln(x-1) - \ln(x^2+1)) \end{aligned}$$

Apliquemos la regla de la cadena para derivar la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+1} 2x \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+1 - (x-1)2x}{(x-1)(x^2+1)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+1 - 2x^2 + 2x}{(x-1)(x^2+1)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x^2+1)} \right) \end{aligned}$$

2.7. Derivadas de orden superior

Definición. 13. ✓ Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. f es dos veces diferenciable en $x \in D$ si f' es diferenciable en x . En este caso,

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = (f')'(x)$$

Es la segunda derivada de f en x .

✓ Si f es k veces diferenciable en $x \in D$, decimos que f es $k+1$ veces diferenciable en $x \in D$, si $(f^{(k)})'$ existe en x . En este caso $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x)$ es la derivada de orden $k+1$ de f en x .

Definición. 14. Sea $k \in \mathbb{N}$, f es k veces continuamente diferenciable en D si f es k veces diferenciable en D y $f^{(k)}$ es continua en D .

$$C^k(D; \mathbb{R}) = C^k(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable en } D\}$$

Ejemplos. 25.



1. Si $f(x) = (x^2 - 1)^3$, entonces su primera derivada es $f'(x) = 3x^4 - 6x^2 - 3$, ahora su segunda y tercera derivadas son:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3(4x^3) - 6(2x) \\ &= 12x^3 - 12x \end{aligned}$$

2. Si $g(x) = \sqrt{2 - 9x}$, entonces su primera derivada es $g'(x) = \frac{9}{2}(2 - 9x)^{-\frac{1}{2}}$, entonces su segunda derivada:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-9}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) (2 - 9x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{9}{4} (2 - 9x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

3. Si $x^2 - xy + y^2 = 3$, entonces su primera derivada es $y' = \frac{y-2x}{-xy'+2y}$, luego su segunda derivada es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y') &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y-2x}{-xy'+2y} \right) \\ y'' &= \frac{(-x+2y)\frac{d}{dx}(y-2x) - (y-2x)\frac{d}{dx}(-x+2y)}{(-x+2y)^2} \\ y'' &= \frac{(-x+2y)(y'-2) - (y-2x)(-1+2y')}{(-x+2y)^2} \\ y'' &= \frac{-xy' + 2x + 2yy' - 4y + y - 2yy' - 2x + 4xy'}{(-x+2y)^2} \\ y'' &= \frac{3xy' - 3y}{(-x+2y)^2} = \frac{3x \left(\frac{y-2x}{-x+2y} \right) - 3y}{(-x+2y)^2} \\ y'' &= \frac{18}{(-x+2y)^3} \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = [(2x+1)^{10} + 1]^{10}$, entonces su primera derivada es $t'(x) = 200((2x+1)^{10} + 1)^9(2x+1)^9$, entonces calculemos su segunda derivada:

$$\begin{aligned} t''(x) &= 200[9((2x+1)^{10} + 1)^8(10(2x+1)^9)((2x+1)^9) + ((2x+1)^{10} + 1)^9(9(2x+1)^8)2] \\ &= 200[90((2x+1)^{10} + 1)^8(2x+1)^{18} + 18((2x+1)^{10} + 1)^9(2x+1)^8] \end{aligned}$$



2.8. Ejercicios

1. Derive las siguientes funciones utilizando la definición del límite:

a) $f(x) = 24x^2 - 8x + 2$

b) $g(x) = x^2 - \frac{7}{x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

d) $t(x) = \frac{1}{x+2}$

2. Demuestre que la función $h(x) = |2x - 1|$ no es derivable en $x = \frac{1}{2}$. (*Sugerencia: Halle $h'(\frac{1}{2})$ cuando h tiende a cero por la derecha y cuando tiende a cero por la izquierda.*)

3. Derive las siguientes función algebraicas, utilizando las reglas de derivación.

a) $f(x) = 10x^2 + 9x - 4$

b) $g(x) = (2x^2 - 3x + 5)(x^4 - 2x + 9)$

c) $h(t) = \frac{8t+15}{t^2-2t+3}$

d) $n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$

e) $f(t) = \frac{\frac{3}{5t}-1}{\frac{2}{t^2}+7}$

f) $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$

g) $y = \frac{x+1}{x+2}(2x-5)$

h) $y(x) = (x^2 - \frac{1}{x^2})(x^2 + 1)$

4. En cada una de las siguientes funciones encuentre: La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado. y los puntos sobre la gráfica en las cuales la recta tangente es horizontal, (es decir, $m = 0$).

a) $y = \frac{5}{1+x^2}$ en $P(-2, 1)$.

b) $y = x + \frac{1}{x}$ en $P(1, 2)$.

c) $y = 5x^2 - 3x - 10$ en $P(2, 4)$.

d) $y = (2x^3 - x + 1)(x^2 - 4)$ en $P(0, -4)$.

e) $y = \frac{7x-1}{x^2-4}$ en $P(1, -2)$.

5. Derive cada una de las siguientes funciones compuestas:



- a) $f(x) = (10x^2 + 9x - 4)^3$
- b) $g(x) = (2x^2 - 3x + 5)^2(x^4 - 2x + 9)^{-2}$
- c) $h(t) = \left(1 + \frac{1}{t-1} + 1\right)^{-2}$
- d) $n(x) = 3x^2\sqrt{9 - 4y^2}$
- e) $f(t) = \frac{(t^2+1)^3}{(4t-5)^4}$
- f) $t(w) = \sqrt[3]{w^3(9w+1)^5}$
- g) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$
- h) $x(w) = \frac{(3w-5)^2(7w+3)^4}{(w+2)^3(w-1)^5}$

6. En los siguientes ejercicios: Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada, en el punto indicado. Y determine los puntos sobre la gráfica en los cuales la recta tangente es horizontal.

- a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$ en $P(2, 81)$.
- b) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ en $P(2, 6)$.
- c) $y = \sqrt{\frac{5x+4}{-2x+3}}$ en $P(1, 3)$.
- d) $y = \sqrt[3]{3x^2 + 5}$ en $P(1, 2)$.
- e) $y = \frac{(7x-1)^2}{(x^2-4)^2}$ en $P(0, \frac{1}{16})$.

7. Para cada una de las siguientes funciones, calcule la segunda y tercera derivada:

- a) $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$
- b) $h(x) = \frac{1}{x^2+4}$
- c) $m(x) = (3x + 4)^4$
- d) $p(x) = x\sqrt[5]{x^2 - 1}$
- e) $y = \frac{2}{(x-1)^3}$

8. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ encuentre una fórmula para la n -ésima derivada de f y calcule $f^n(1)$.
(Sugerencia: Demuestre por inducción matemática.)

9. Encuentre todas las derivadas diferentes de cero de las siguientes funciones (es decir, cuando la derivada de orden superior se vuelve cero).



- a) $f(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3$
- b) $g(x) = (x^2 - 1)^3$
- c) $p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + \pi x^2 + \pi^2$
- d) $g(x) = -4(7x + 5)^2$
- e) $y = \frac{2}{(x-1)}^3$

10. Para cada una de las siguientes ecuaciones: Halle la derivada implícita. Y determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de dicha ecuación en el punto dado.

- a) $y^2 = \frac{x^2-9}{x^2+9}$ en $P(3, 0)$.
- b) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ en $P(0, 0)$.
- c) $(x - y^2)(x + xy) = 4$ en $P(2, 1)$.
- d) $x^3 + (xy)^2 + x^3y^5 = 3$ en $P(1, 1)$.
- e) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2} - 2y = 2$ en $P(0, -1)$.

11. Halle la derivada de cada las siguientes funciones trascendentales.

- a) $y = \frac{1}{x} - 3 \sin x$
- b) $y = 3^{\frac{1-\sin x}{2 \cos x}}$
- c) $y = 2x \sin x + x^2 \cos x$
- d) $h(x) = \sin(2x) \cos(2x)$
- e) $f(x) = \frac{\cot x}{\sin x}$
- f) $y = \sin \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{\sin x}$
- g) $y = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{3} \right)$
- h) $y = x \arccos(2x) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2}$
- i) $y = \arctan \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$
- j) $y = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- k) $f(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} \right)$
- l) $y = \ln(x\sqrt{x^2-1})$
- m) $y = \ln \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}$



$$n) \ y = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$$

$$\tilde{n}) \ y = e^{3x} \ln(5x^2 + 4)^3$$

$$o) \ g(t) = e^{\frac{-3}{t^2}}$$

$$p) \ y = (e^{-t} + e^t)^3$$

$$q) \ y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

12. Halle $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, es decir, la primera y segunda derivada de las siguientes ecuaciones:

$$a) \ \ln(xy) + 5x = 30.$$

$$b) \ e^{xy} + x^2 - y^2 = 10.$$

$$c) \ x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2).$$

$$d) \ 1 + \ln(xy) = e^{x-y}.$$

$$e) \ 2y^2 + 1 = e^{\frac{x+y}{x-y}}.$$



CAPÍTULO 3

Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio

El teorema del valor medio para derivadas es muy útil para deducir muchas de las propiedades de las funciones en el Cálculo. Pero antes de establecer el teorema del valor medio, estudiaremos uno de sus casos particulares a partir del cual puede deducirse el teorema general. Este caso particular lo descubrió en 1690 Michel Rolle (1652-1719), matemático francés. Este capítulo fue tomado de las *Notas de Análisis Matemático*, curso dictado por Leonardo Solanilla en la Universidad del Tolima. [5]

Comenzaremos a definir algunas propiedades de funciones:

Definición. 15. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, una función e I un intervalo real en una función.

- a. f es monótona creciente si $f(x_1) \leq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2$.
- b. f es monótona decreciente si $f(x_1) \geq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$.
- c. f es estrictamente monótona creciente si $f(x_1) < f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$.
- d. f es estrictamente monótona decreciente si $f(x_1) > f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$.

Definición. 16 (Máximo y Mínimo Local:). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- a. f asume un máximo local en $x_0 \in D$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $f(x_0) \geq f(x)$.
- b. f asume un mínimo local en $x_0 \in D$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $f(x_0) \leq f(x)$.

Definición. 17 (Máximo y Mínimo Global:). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.



- a. Si $x \in D$, entonces $f(x) \leq f(x_0)$. x_0 es un máximo global en D .
- b. Si $x \in D$, entonces $f(x) \geq f(x_0)$. x_0 es un mínimo global en D .

Es decir, un máximo (o mínimo) relativo en x_0 es un máximo (o mínimo) global en un cierto entorno de x_0 , si bien no es necesariamente un máximo global en todo el conjunto D . Pero si, cualquier máximo (o mínimo) global es, en particular, un máximo (o mínimo) local. (Ver figura 3.1)

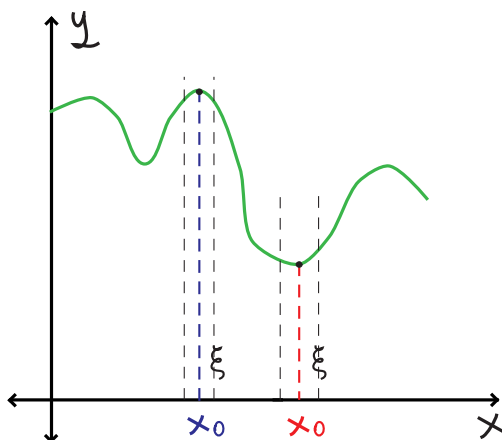


Figura 3.1: Máximo y mínimo local

Teorema. 14. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función que asume un máximo(ó mínimo) local en un punto $x_0 \in D$ donde $D = (a, b)$. Si f es diferenciable en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$. El recíproco no se cumple.

Demostración. Como f asume un máximo local en x_0 , entonces si $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $f(x_0) \geq f(x)$. Así pues,

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \begin{cases} > 0 \text{ si } \xi < x_0 \\ < 0 \text{ si } \xi > x_0 \end{cases}$$

Por hipótesis tenemos que

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \text{ donde } \xi \in D - \{x\}$$

Existe y por tanto, la única posibilidad de $f'(x_0)$ es que $f'(x_0) = 0$. ◇



3.1. Teorema de Rolle

Teorema. 15. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$

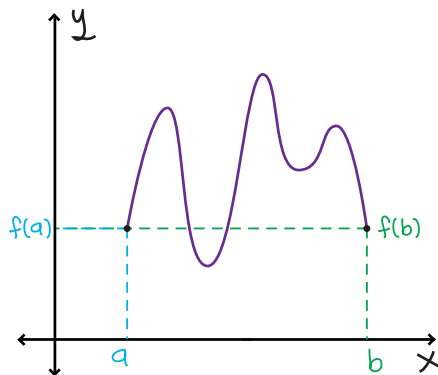


Figura 3.2: Teorema de Rolle

Demostración.

✓ Si f es constante en $[a, b]$ $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$.

✓ Si f no es constante en $[a, b]$ existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) \neq (f(a) = f(b))$.

Sin pérdida de generalidad, $f(x) > (f(a) = f(b))$. Como $[a, b]$ es compacto, por ser f continua, alcanza su máximo en cierto $m \in [a, b]$.

Así pues $f(m) \geq f(x) > (f(a) = f(b))$ lo cual implica $f(m) > (f(a) = f(b))$.

Entonces, $m \in (a, b)$. Afirmamos $m = x_0$, ya que m es un máximo local en (a, b) y además f es diferenciable en (a, b) . Por lo tanto $f'(m) = f'(x_0) = 0$. $\diamond$

3.2. Teorema del Valor Medio de Cauchy

Teorema. 16. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) . Supongamos que $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$



Demostración. Construimos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$$F(a) = 0 = F(b)$$

Además f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) ya que $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Por tanto el teorema de Rolle tenemos que:

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) = 0$$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

◇

3.3. Teorema del Valor Medio

Teorema. 17. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

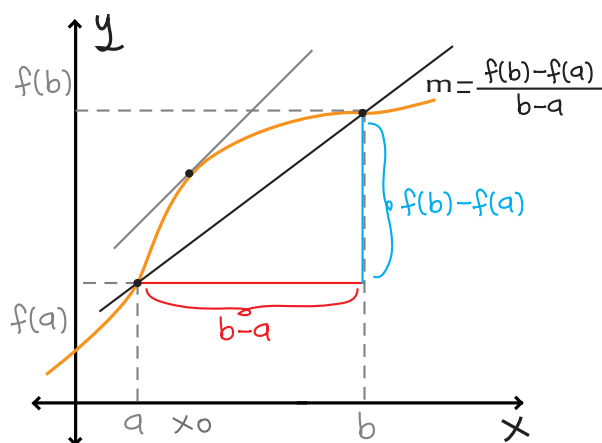


Figura 3.3: Valor Medio

Demostración. Usando el teorema del valor medio de Cauchy con $f(x) = f(x)$ y $g(x) = x$ se tiene entonces que:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{(x)'} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

◇

Ejemplos. 26.

1. Verifique si la función $f(x) = x^4 - 2x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$, satisface las hipótesis del Teorema de Rolle:

✓ *f Continuidad en el intervalo $[a, b]$.*

Para todo $j \in [-2, 2]$, entonces $f(j)$ está definido ya que $f(j) = (j)^4 - 2(j) + 1 \in \mathbb{R}$.

También $\lim_{x \rightarrow j} f(x)$ existe, y $\lim_{x \rightarrow j} f(x) = f(j)$.

✓ *f Diferenciable en el intervalo (a, b) .*

La función f es diferenciable para todo $p \in (a, b)$ ya que $f'(j) = \lim_{x \rightarrow j} \frac{f(x) - f(j)}{x - j}$ existe y es igual a $f'(j) = 4(j)^3 - 2$.

✓ *Igualdad entre las imágenes de los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$.*

$$\begin{aligned} & f(-2) \mid f(2) \\ & (-2)^4 - 2(-2) + 1 \mid (2)^4 - 2(2) + 1 \\ & 21 \neq 13 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función anterior no satisface todas las hipótesis del teorema de Rolle.

2. Verifique si las funciones $f(x) = x^4 - 2x + 1$ y $g(x) = x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$, satisface el teorema del Valor Medio de Cauchy:



✓ *f* Continuidad en el intervalo $[a, b]$.

Para todo $j \in [-2, 2]$, entonces $f(j)$ esta definido ya que $f(j) = (j)^4 - 2(j) + 1 \in \mathbb{R}$. Tambien $\lim_{x \rightarrow j} f(x)$ existe, y $\lim_{x \rightarrow j} f(x) = f(j)$. Y para todo $h \in [-2, 2]$, entonces $g(h)$ esta definido ya que $g(h) = (h) + 1 \in \mathbb{R}$. Tambien $\lim_{x \rightarrow h} g(x)$ existe, y $\lim_{x \rightarrow h} g(x) = g(h)$.

✓ *f* Diferenciable en el intervalo (a, b) .

La funcion f es diferenciable para todo $p \in (-2, 2)$ ya que $f'(j) = \lim_{x \rightarrow j} \frac{f(x)-f(j)}{x-j}$ existe y es igual a $f'(j) = 4(j)^3 - 2$. Y La funcion g es diferenciable para todo $q \in (-2, 2)$ ya que $g'(q) = \lim_{x \rightarrow q} \frac{g(x)-g(q)}{x-q}$ existe y es igual a $g'(q) = 1$.

Entonces existe un x_0 talque

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} &= \frac{f(2) - f(-2)}{g(2) - g(-2)} \\ \frac{4(x_0)^3 - 2}{1} &= \frac{21 - 13}{3 - (-1)} \\ 4(x_0)^3 - 2 &= \frac{8}{4} \\ 4(x_0)^3 &= 4 \\ (x_0)^3 &= 1 \end{aligned}$$

Es decir $x_0 = 1$.

3. Verificar el teorema del valor medio para la función $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$, en el cerrado $[-3, 3]$:

✓ *f* Continuidad en el intervalo $[a, b]$.

Para todo $j \in [-3, 3]$, entonces $f(j)$ esta definido ya que $f(j) = 2(j)^3 - 8(j) + 1 \in \mathbb{R}$. Tambien $\lim_{x \rightarrow j} f(x)$ existe, y $\lim_{x \rightarrow j} f(x) = f(j)$.

✓ *f* Diferenciable en el intervalo (a, b) .

La funcion f es diferenciable para todo $p \in (-3, 3)$ ya que $f'(j) = \lim_{x \rightarrow j} \frac{f(x)-f(j)}{x-j}$ existe y es igual a $f'(j) = 6(j)^2 - 8$.



Entonces existe un $x_0 \in (-3, 3)$ tal que

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} \\ 6(x_0)^2 - 8 &= \frac{31 - (-29)}{6} \\ 6(x_0)^2 &= \frac{25}{3} + 8 \\ 6(x_0)^2 &= \frac{25}{3} + \frac{24}{3} \\ (x_0)^2 &= \frac{49}{18} \\ x_0 &= \sqrt{\frac{49}{18}} \end{aligned}$$

4. Verificar el teorema del valor medio para la función $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$, en el cerrado $[1, 3]$:

✓ f Continuidad en el intervalo $[a, b]$.

✓ f Diferenciable en el intervalo (a, b) .

3.4. Ejercicios

1. Verifique si las siguientes funciones en el intervalo dado, satisface las hipótesis del Teorema de Rolle:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[0, 2]$

b) $g(x) = x^3 - 27$ en $[-3, 3]$

c) $h(x) = x^4 - 16$ en $[-2, 2]$

d) $t(x) = \sin(x)$ en $[0, 2\pi]$

2. Calcule explícitamente todos los valores de x_0 que cumplan el Teorema del valor medio de las siguientes funciones y explique si satisfase las hipotesis de dicho teorema:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[0, 2]$

b) $g(x) = x^3 - 27$ en $[-3, 3]$



c) $h(x) = x^4 - 16$ en $[-2, 2]$

d) $t(x) = \sin(x)$ en $[0, 2\pi]$



CAPÍTULO 4

Aplicaciones

4.1. Trazado de curvas

Los teoremas de este capítulo son útiles para trazar la gran mayoría de curvas en el plano $\mathbb{R}^2$. Al dibujar la gráfica de una función f , primero debe determinarse el dominio y recorrido de f . Un conocimiento del dominio y recorrido nos da una idea de la amplitud de la curva $y = f(x)$, ya que precisa la porción del plano xy en la que está situada la curva. Para esto, hay que situar los puntos (si existen) en los que la curva corta los ejes coordenados. La intersección con el eje y son los puntos $(0, f(0))$ suponiendo que 0 pertenece al dominio de f y las intersecciones con el eje x son los puntos $(x, 0)$ para los que $f(x) = 0$. Seguidamente es aconsejable determinar intervalos en los que f es monótona examinando el signo de f' , y determinar los intervalos de convexidad o concavidad estudiando el signo de f'' . Pero antes de esto, tener especial cuidado en los puntos en los que la gráfica tiene asíntotas horizontales o verticales.

4.1.1. Criterio de la primera derivada para extremos

Con el teorema del valor medio pueden deducirse propiedades de las funciones partiendo del conocimiento del signo algebraico de su derivada. Esto se puede ver en el siguiente teorema.

Teorema. 18. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces:*

✓ *Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b) , f es estrictamente creciente en $[a, b]$.*



✓ Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b) , f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

✓ Si $f'(x) = 0$ para todo x de (a, b) , f es constante en $[a, b]$.

Luego, con este teorema podemos emplearlo para demostrar que la presencia de un máximo (o mínimo) siempre que la primera derivada cambia de signo.

Teorema. 19. Supongamos que f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a, b) , excepto en un punto x_0 .

✓ Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < x_0$ y negativa para todo $x > x_0$, f tiene un máximo relativo en x_0 .

✓ Si $f'(x)$ es negativa para todo $x < x_0$ y positiva para todo $x > x_0$, f tiene un mínimo relativo en x_0 .

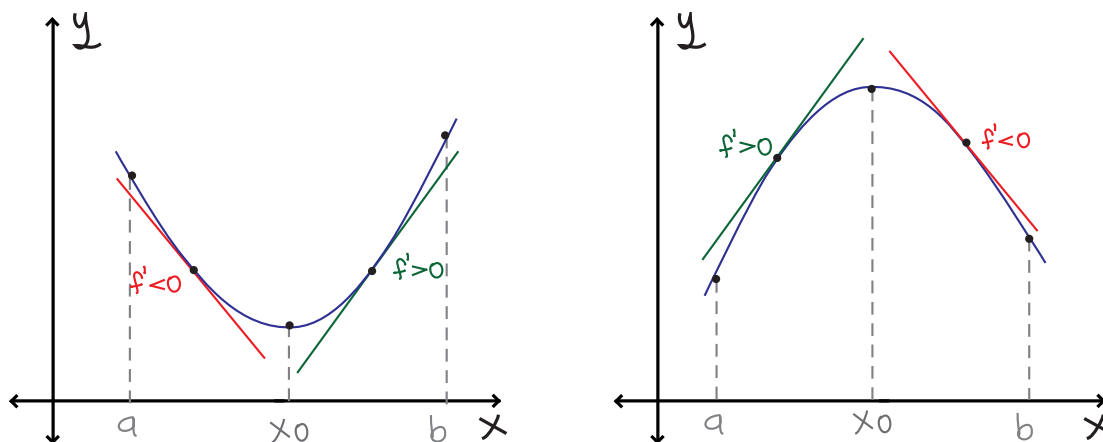


Figura 4.1: Mínimo y Máximo

4.1.2. Criterio de la segunda derivada para extremos

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si f tiene derivada en cada punto interior, entonces por el teorema 19, los únicos puntos en los que pueden presentarse máximos (o mínimos) son los extremos del intervalo a y b , o en aquellos puntos interiores x_0 en los que $f'(x_0) = 0$. Estos puntos suelen llamarse puntos críticos de f . El teorema que sigue hace ver que un estudio del signo de la segunda derivada en las cercanías de x_0 puede también sernos útil.



Teorema. 20. Sea x_0 un punto crítico de f en un intervalo abierto (a, b) ; esto es, suponemos $a < x_0 < b$ y $f'(x_0) = 0$. Supongamos también que existe la segunda derivada f'' en (a, b) . Entonces tenemos:

✓ Si f'' es negativa en (a, b) , f tiene un máximo relativo en x_0 .

✓ Si f'' es positiva en (a, b) , f tiene un mínimo relativo en x_0 .

4.1.3. Criterio de la derivada para la convexidad

El signo de la segunda derivada también está relacionado con la concavidad o la convexidad de f .

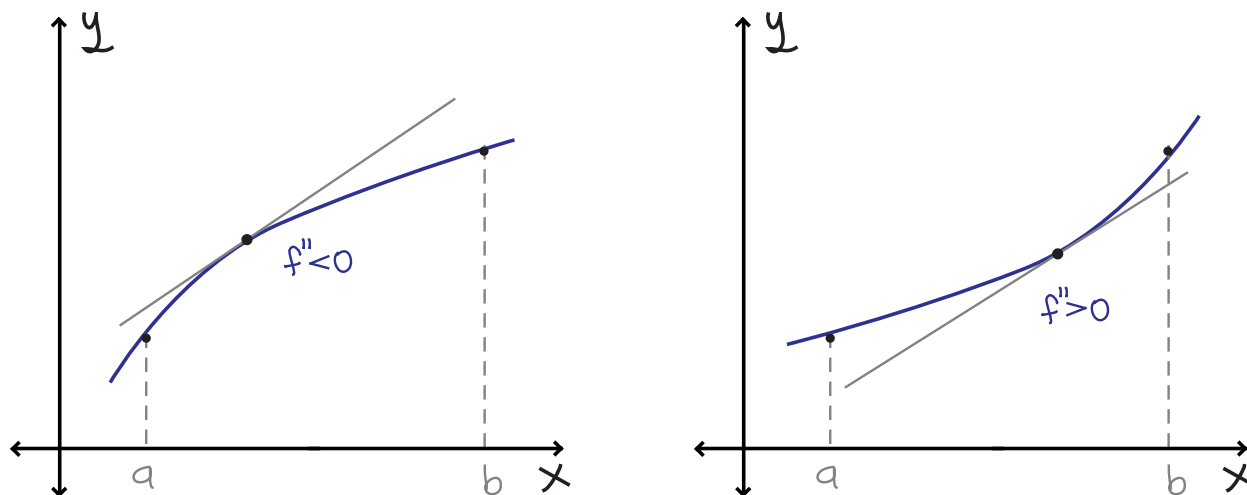


Figura 4.2: Cóncavo y Convexo

Teorema. 21. Supongamos f continua en $[a, b]$ y que tenga derivada en el intervalo (a, b) .

✓ Si f' es creciente en (a, b) entonces es convexa en $[a, b]$. En particular, f es convexa si f'' existe y es no negativa en (a, b) .

✓ Si f' es decreciente en (a, b) entonces es cóncava en $[a, b]$. En particular, f es cóncava si f'' existe y es no positiva en (a, b) .

Un punto donde una curva cambia de cóncava a convexa (o de convexa a cóncava), se llama punto de inflexión. La curva de la figura anterior cambia de cóncava a convexa en P , y de convexa a cóncava en Q , de forma que tanto P como Q son puntos de inflexión.



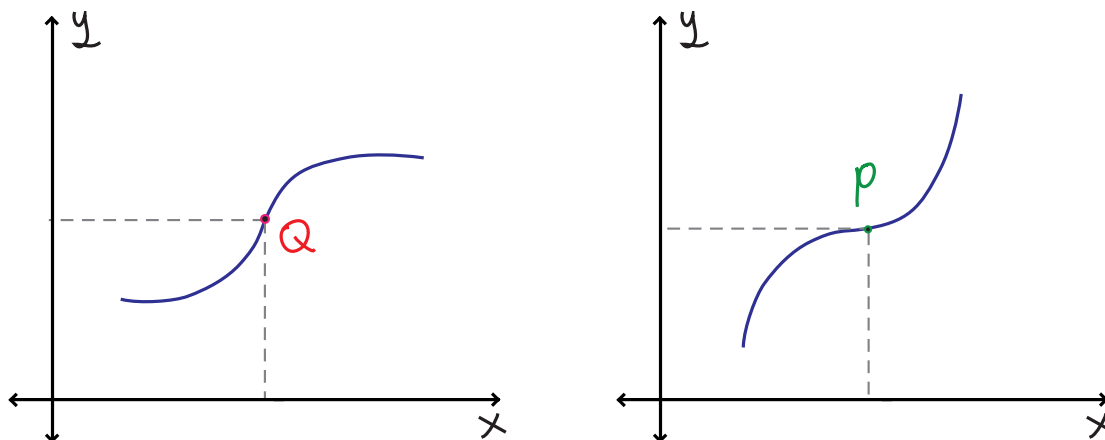


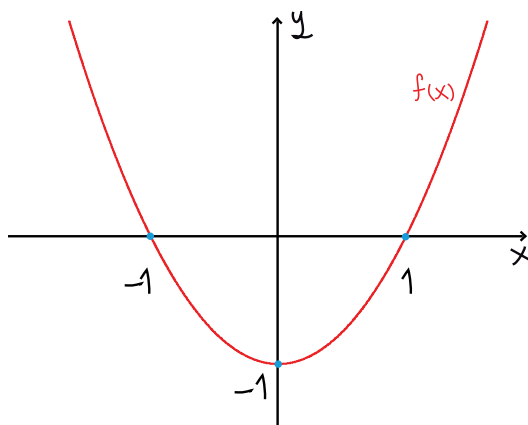
Figura 4.3: Punto de inflexión

Ejemplos. 27.1. **La gráfica de $y = f(x) = x^2 - 1$.**

Como se mencionó al comienzo del capítulo, para trazar una gráfica lo primero que debemos hacer es determinar su dominio y recorrido. El dominio para esta función son todos los reales pero su recorrido solamente son los reales positivos incluyendo el cero. Luego debemos situar los puntos (si existe) en los que la curva corta los ejes coordenados. La intersección con el eje y es el punto $(0, f(0)) = (0, 0^2 - 1) = (0, -1)$, entonces la función corta el eje y en el punto $(0, -1)$ y las intersecciones con el eje x son los puntos $(x, 0)$ para los que $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{1}$, por lo tanto la curva también corta el eje x en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Ahora proseguimos, en calcular las dos primeras derivadas para estudiar el signo de las derivadas y los número donde la recta tangente es totalmente horizontal, es decir, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, y su segunda deriva es $f''(x) = 2 > 0$ positiva es decir convexo $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < \infty$. Para finalizar y poder dibujar la gráfica de $f(x)$ tenemos que elaborar la tabla 4.1:

Intervalos	$f(x)$	Signo de f'	Signo de f''	Observación
$-\infty < x < 0$	$y = x^2 - 1$	negativo (-)	positivo (+)	f es decreciente y convexa
$x = 0$	$y = -1$	número crítico	numero critico	Punto mínimo
$0 < x < \infty$	$y = x^2 - 1$	positivo (+)	positivo (+)	f es creciente y convexa

Cuadro 4.1: Tabulación de la curva $y = x^2 - 1$ 

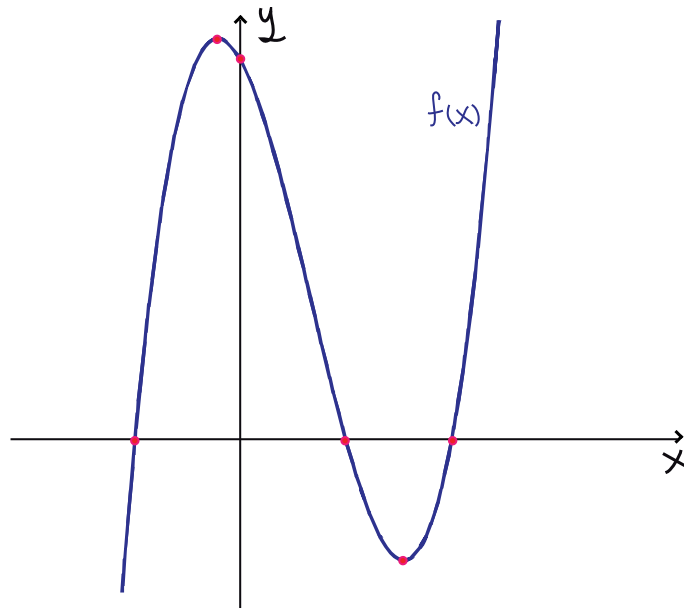
Figura 4.4: Trazo de la curva $y = x^2 - 1$

2. La gráfica de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$.

El dominio y recorrido de esta función son todos los reales. La intersección con el eje y es el punto $(0, f(0)) = (0, (0)^3 - 6(0)^2 - 9(0) + 54) = (0, 54)$, entonces la función corta el eje y en el punto $(0, 54)$ y las intersecciones con el eje x son los puntos $(x, 0)$ para los que $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 - 3x - 18) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3)(x - 6) = 0$, por lo tanto la curva también corta el eje x en los puntos $(-3, 0)$, $(3, 0)$ y $(6, 0)$. Ahora proseguimos, a calcular las dos primeras derivadas para estudiar el signo de las derivadas y los numero críticos, es decir, $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$, entonces $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$, y su segunda deriva es $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$, por lo tanto, los números críticos son $x = 3 - 2\sqrt{3}$ y $x = 3 + 2\sqrt{3}$ y su punto de inflexión es $x = 2$. Y para finalizar y poder dibujar la gráfica de $f(x)$ tenemos que elaborar la tabla 4.2:

Intervalos	$f(x)$	Signo de f'	Signo de f''	Observación
$-\infty < x < 3 - 2\sqrt{3}$	$y = f(x)$	(+)	(-)	f es creciente y cóncava
$x = 3 - 2\sqrt{3}$	$y = 36 + 12\sqrt{3}$	0	# crítico	Punto máximo
$3 - 2\sqrt{3} < x < 2$	$y = f(x)$	(-)	(-)	f es decreciente y cóncava
$x = 2$	$y = 20$	# crítico	0	Punto de inflexión
$2 < x < 3 + 2\sqrt{3}$	$y = f(x)$	(-)	(+)	f es decreciente y convexa
$x = 3 + 2\sqrt{3}$	$y = 36 - 12\sqrt{3}$	0	# crítico	Punto mínimo
$3 + 2\sqrt{3} < x < \infty$	$y = f(x)$	(+)	(+)	f es creciente y convexa

Cuadro 4.2: Tabulación de la curva $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$

Figura 4.5: Trazo de la curva $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$

3. La gráfica de $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$.

El dominio son todos los reales menos el cero, ya que $f(0)$ no existe y para su recorrido debemos determinar sus asíntotas, ya tenemos la primera $x = 0$, es decir la asíntota vertical, para la asíntota horizontal calculamos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ no existe, por lo tanto no tiene asíntotas horizontales y por último la asíntota oblicua, la cual tiene la forma de $y = ax + b$, donde $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$, entonces,

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

luego la asíntota oblicua es la recta $y = x$. La intersección con el eje y es el punto $(0, f(0)) = (0, 0 + \frac{1}{0}) = (0, \text{no existe})$, entonces la función no corta el eje y y las intersecciones con el eje x son los puntos $(x, 0)$ para los que $f(x) = 0$, entonces

$$x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 0 \Rightarrow x^2+1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-1},$$

esto no tiene solución en los números reales, por lo tanto la curva tampoco corta el eje x . Ahora proseguimos, a calcular las dos primeras derivadas para estudiar el signo de las derivadas y los números críticos, es decir, $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$, entonces

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1},$$



y su segunda deriva es $f''(x) = \frac{2}{x^3} = 0$, por lo tanto, los numeros críticos son $x = -1$ y $x = 1$ pero no tiene punto de inflexión. Para finalizar y poder dibujar la gráfica de $f(x)$ tenemos que elaborar la tabla 4.3:

Intervalos	$f(x)$	Signo de f'	Signo de f''	Observación
$-\infty < x < -1$	$y = f(x)$	(+)	(+)	f es creciente y convexa
$x = -1$	$y = -2$	0	# crítico	Punto máximo
$-1 < x < 0$	$y = f(x)$	(-)	(+)	f es decreciente y convexa
$x = 0$	$y = \text{no existe}$			Asíntota vertical
$0 < x < 1$	$y = f(x)$	(-)	(-)	f es decreciente y concava
$x = 1$	$y = 2$	0	# crítico	Punto mínimo
$1 < x < \infty$	$y = f(x)$	(+)	(-)	f es creciente y cóncava

Cuadro 4.3: Tabulación de la curva $y = x + \frac{1}{x}$

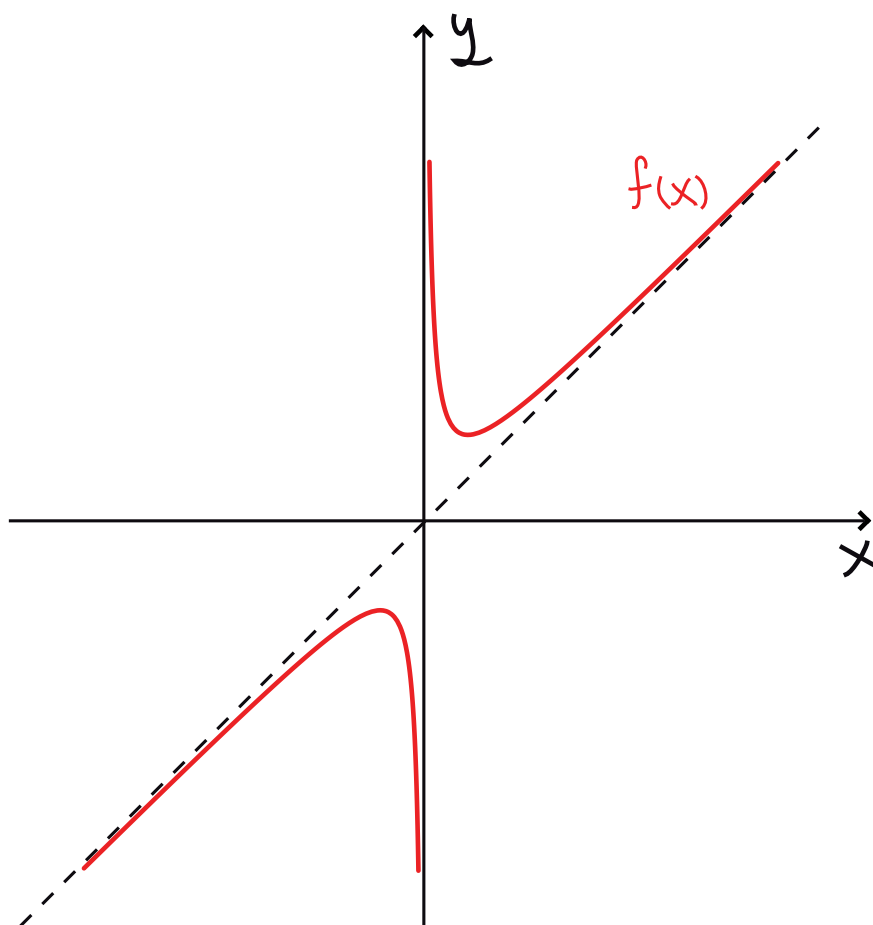


Figura 4.6: Traza de la curva $y = x + \frac{1}{x}$

4. La gráfica de $y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

El dominio son todos los reales y para su recorrido debemos determinar sus asíntotas, no tiene asíntota vertical, para la asíntota horizontal calculamos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ existe, por lo tanto tiene asíntotas horizontales $y = 0$ y no tiene asíntota oblicua. La intersección con el eje y es el punto $(0, f(0)) = (0, \frac{1}{0^2+1}) = (0, 1)$, entonces la función corta el eje y en el punto $(0, 1)$ y las intersecciones con el eje x son los puntos $(x, 0)$ para los que $f(x) = 0$, entonces

$$\frac{1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 1 = 0(x^2+1) \Rightarrow 1 = 0,$$

(contradicción), es decir no tiene solución en los números reales, por lo tanto la curva no corta el eje x . Ahora proseguimos, a calcular las dos primeras derivadas para estudiar el signo de las derivadas y los números críticos, es decir, $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$, entonces

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0((x^2+1)^2) \Rightarrow x = 0,$$

y su segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x)2(x^2+1)2x}{((x^2+1)^2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2(x^2+1)(1-4x^2)}{(x^2+1)^4} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{-2(1-4x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow -2(1-4x^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} = x^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, los números críticos son $x = 0$, y sus puntos de inflexión son $x = -\frac{1}{\sqrt{4}}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{4}}$. Para poder dibujar la gráfica de $f(x)$ tenemos que elaborar la tabla 4.4:

Intervalos	$f(x)$	Signo de f'	Signo de f''	Observación
$-\infty < x < -\frac{1}{2}$	$y = f(x)$	(+)	(+)	f es creciente y convexa
$x = -\frac{1}{2}$	$y = \frac{4}{5}$	# crítico	0	Punto de inflexión
$-\frac{1}{2} < x < 0$	$y = f(x)$	(+)	(-)	f es decreciente y convexa
$x = 0$	$y = 1$	0	(-)	Punto máximo
$0 < x < \frac{1}{2}$	$y = f(x)$	(-)	(-)	f es decreciente y cóncava
$x = \frac{1}{2}$	$y = \frac{4}{5}$	# crítico	0	Punto de inflexión
$\frac{1}{2} < x < \infty$	$y = f(x)$	(-)	(-)	f es creciente y cóncava

Cuadro 4.4: Tabulación de la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$



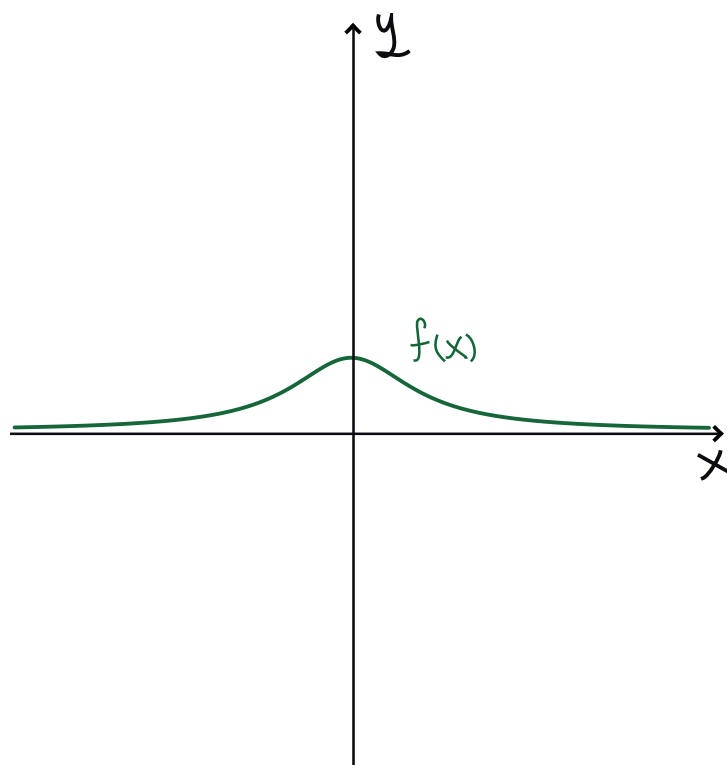


Figura 4.7: Trazo de la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$

4.2. Optimización

El criterio de la primera y segunda derivada son métodos para determinar puntos extremos. Ahora estudiaremos las relaciones en muchas áreas de la vida cotidiana. Un negociante quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades. El principio de Fermat, en óptica, afirma que la luz sigue la trayectoria que le toma menos tiempo. En esta sección resolveremos problemas como: maximizar áreas, volúmenes y utilidades, o minimizar distancia, tiempos y costos.

No existen reglas firmes y rápidas para garantizar el éxito de la solución de problemas de este tipo. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales del proceso de solución de problemas. [3]

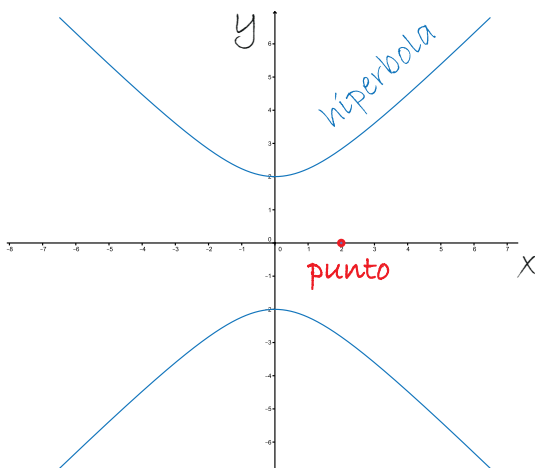
1. **Comprender el problema.** Hágase las preguntas:Cuál es la incógnita?, Cuáles son las cantidades dadas? Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Hacer un dibujo del problema.** Resulta útil dibujar un diagrama e identificar en

él el problema.

3. **Introducir variables y notación.** Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar, como por ejemplo, A (área), V (volumen), C (costos), etc. También utilizar letras minúsculas para las otras cantidades desconocidas, es decir, variables como x , y , a , ... y marque el diagrama con estos símbolos.
4. **Relacionar la información.** Expresa el símbolo escrito en mayúscula en términos de los símbolos que están en minúscula.
5. **Despejar la función de interés.** Dejar el símbolo escrito en mayúscula como función de una sola variable, digamos $A = f(x)$. Y escriba su dominio.
6. **Aplicar los métodos.** Hallar el valor máximo o mínimo de f con los criterios de la primera y segunda derivada.

Ejemplos. 28.

1. Encuentre los puntos sobre la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que están más próximos al punto $(2, 0)$. [7]
 - a) **Comprender el problema.** La incógnita es el punto de la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ más próximo al punto $(2, 0)$. Las cantidades dadas son la hipérbola y el punto. La condición es distancia mínima entre un punto de la hipérbola y el punto dado.
 - b) **Dibujo del problema.**



c) **Introducir variables y notación.** La distancia entre el punto $(2, 0)$ y el punto (x, y) es $D = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$.

d) **Relacionar la información.** Pero si (x, y) está sobre la hipérbola, entonces $x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$.

e) **Despejar la función de interés.** Entonces la expresión para D queda $D = \sqrt{(\pm\sqrt{y^2 - 4} - 2)^2 + (y - 0)^2}$, si tomamos el x positivo obtenemos

$$D = \sqrt{y^2 - 4 - 4\sqrt{y^2 - 4} + 4 + y^2} = \sqrt{2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4}}$$

f) **Aplicar los métodos.** La derivada de D es:

$$\begin{aligned} D' &= \frac{1}{2}(2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4})^{-\frac{1}{2}}(4y - 4\frac{1}{2}(y^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}2y) & 0 &= D' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4}}} \left(4y - 4\frac{y}{\sqrt{y^2 - 4}} \right) & 0 &= 2y \frac{\sqrt{y^2 - 4} - 1}{\sqrt{y^2 - 4}\sqrt{2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4}}} \\ &= \frac{4}{2\sqrt{2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4}}} \left(\frac{y\sqrt{y^2 - 4} - y}{\sqrt{y^2 - 4}} \right) & 0 &= y(\sqrt{y^2 - 4} - 1) \\ &= 2 \frac{y\sqrt{y^2 - 4} - y}{\sqrt{y^2 - 4}\sqrt{2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4}}} & 0 &= \sqrt{y^2 - 4} - 1 \\ &= 2y \frac{\sqrt{y^2 - 4} - 1}{\sqrt{y^2 - 4}\sqrt{2y^2 - 4\sqrt{y^2 - 4}}} & 1 &= y^2 - 4 \\ & & 5 &= y^2 \\ & & \pm\sqrt{5} &= y \end{aligned}$$

Por lo tanto los números críticos son $y = 0$, $y = \pm\sqrt{5}$. Para ver si el mínimo se presenta en estos número críticos o en uno de los puntos extremos del dominio $\mathbb{R}/(-2, 2)$, evaluemos D en todos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} D(0) &= \text{no existe} & D(2) &= D(-2) = \sqrt{8} = 2,82 \\ D(-\sqrt{5}) &= \sqrt{6} \approx 2,44 = D(\sqrt{5}) \end{aligned}$$

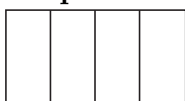
Dado que el menor valor de D en estos valores es cuando $x = \pm\sqrt{5}$. Por consiguiente, el punto (x, y) sobre la hipérbola más cercano a $(2, 0)$ son $(x, y) = (1, -\sqrt{5})$ y $(x, y) = (1, \sqrt{5})$

- Un granjero que tiene 750m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales? [7]

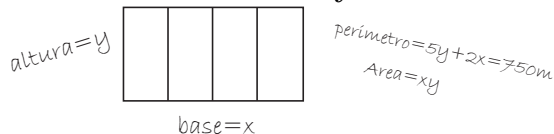


- a) **Comprender el problema.** La incógnita es el área máxima de un rectángulo. La cantidad dada es $750m$ de cerca para dicho rectángulo. La condición dada es que el rectángulo tiene que estar dividido en cuatro partes iguales y las divisiones también deben estar cercadas.

- b) **Dibujo del problema.**



- c) **Introducir variables y notación.**



- d) **Relacionar la información.** La cantidad que se va a maximizar es el área del rectángulo $A_t = xy$ y el perímetro dado es $5y + 2x = 750$.
- e) **Despejar la función de interés.** En la ecuación del perímetro podemos despejar a $y = \frac{750-2x}{5}$ y remplazarlo en la ecuación del área $A_t = \frac{750x-2x^2}{5}$
- f) **Aplicar los métodos.** Por ultimo lo que debemos hacer es derivar la función del área para así encontrar los numeros críticos y luego utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar cuáles son las dimension que máximzan el área.

$$\begin{aligned} A' &= 150 - \frac{4}{5}x = 0 \\ -\frac{4}{5}x &= -150 \\ x &= -\frac{5}{4}(-150) \\ x &= \frac{375}{2} \end{aligned}$$

y como la segunda derivada es $A'' = -\frac{4}{5}$, esto quiere decir que ese valor es un máximo para el área, solo hace falta encontrar la altura $y = \frac{750-2\frac{375}{2}}{5} = 75$. Por lo tanto el área máxima de los cuatro corrales es:

$$A = xy = \frac{375}{2}75 = \frac{28125}{2} = 14062,5m^2$$

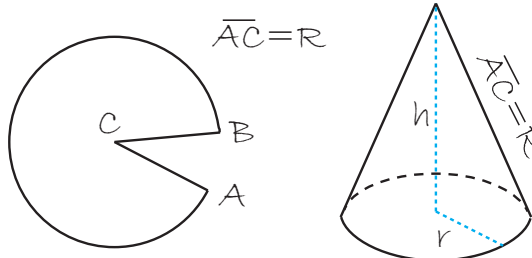
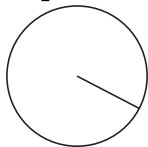
3. Se elabora un cono para beber a partir de un trozo de papel circular de radio R , al recortar un sector y unir los bordes CA y CB . Encuentre la capacidad máxima del cono. [7]



- a) **Comprender el problema.** La incógnita es el volumen máxima de un cono. La cantidad dada es el radio R . La condición dada es que el cono se debe elaborar con algún material circular, la cual se le corta un trozo hasta el centro.

- c) **Introducir variables y notación.**

- b) **Dibujo del problema.**



- d) **Relacionar la información.** La cantidad que se va a maximizar es el volumen del cono $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ donde r es el radio del cono y h es la altura del cono, también se tiene que $R = \sqrt{r^2 + h^2}$.
- e) **Despejar la función de interés.**

$$R = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$R^2 = r^2 + h^2$$

$$R^2 - h^2 = r^2$$

Y remplazamos en la ecuación del volumen

$$V = \frac{\pi(R^2 - h^2)h}{3}$$

$$V = \frac{\pi(R^2 h - h^3)}{3}$$

- f) **Aplicar los métodos.** Por ultimo lo que debemos hacer es derivar la función del volumen para así encontrar los números críticos y luego utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar cuál es el volumen máxima.

$$V' = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2) = 0$$

$$0 = R^2 - 3h^2$$

$$-R^2 = -3h^2$$

$$\frac{R^2}{3} = h^2$$

$$h = \pm \frac{R}{\sqrt{3}}$$

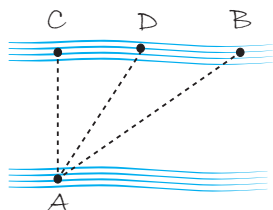


Y su segunda derivada es $V'' = \frac{\pi}{3}(-6h) = -2\pi h$ por lo tanto para $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ el volumen es un máximo porque $V''(\frac{R}{\sqrt{3}}) = -2\pi\frac{R}{\sqrt{3}}$ es negativa. Entonces el volumen máximo es: $V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi\left(R^2\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^3\right)}{3} = \frac{\pi\left(\frac{R^3}{\sqrt{3}} - \frac{R^3}{3\sqrt{3}}\right)}{3} = \frac{\pi R^3\sqrt{3}\left(\frac{3-1}{9}\right)}{3}$. Por lo tanto el volumen máximo es: $V = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

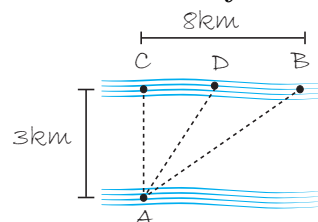
4. Un hombre está en un punto A sobre una de las riberas de un río recto que tiene $3km$ de ancho y desea llegar hasta el punto B , $8km$ corriente abajo en una ribera opuesta, tan rápido como le sea posible. Podría remar en su bote, cruzar directamente el río hasta el punto C y correr hasta B , podría remar hasta D . Si puede remar a $6km/h$ y correr a $8km/h$, dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? [2]

a) **Comprender el problema.** La incógnita es el lugar de desembarque al otro lado del río. Las cantidades dadas son la longitud del río y la velocidad del hombre remado o corriendo. La condición dada es gastar el menor tiempo posible para llegar al punto B .

b) **Dibujo del problema.**



c) **Introducir variables y notación.**



d) **Relacionar la información.** Sea x la distancia desde C hasta D , entonces la distancia por correr es $|DB| = 8 - x$ y por el teorema de Pitágoras la distancia por remar es $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Si suponemos que la velocidad del agua es de $0km/h$ y aplicamos la ecuación

$$tiempo = \frac{distancia}{velocidad}$$

e) **Despejar la función de interés.** Entonces el tiempo que tiene que remar es $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ y el que debe correr es $\frac{8-x}{8}$, de modo que el tiempo total T , como función de x , es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$$



El dominio de esta función es $[0, 8]$. Advierta que, si $x = 0$, rema hacia C y, si $x = 8$, rema directamente hasta B .

f) **Aplicar los métodos.** La derivada de T es:

$$\begin{aligned}
 T' &= \frac{1}{6} \frac{1}{2} (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} 2x - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{8x - 6\sqrt{x^2 + 9}}{48\sqrt{x^2 + 9}} \\
 0 &= T'(x) \\
 0 &= \frac{8x - 6\sqrt{x^2 + 9}}{48\sqrt{x^2 + 9}} \\
 0 &= 8x - 6\sqrt{x^2 + 9}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 6\sqrt{x^2 + 9} &= 8x \\
 \sqrt{x^2 + 9} &= \frac{4}{3}x \\
 x^2 + 9 &= \frac{16}{9}x^2 \\
 9 &= \frac{7}{9}x^2 \\
 \frac{81}{7} &= x^2 \\
 \pm \frac{9}{\sqrt{7}} &= x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto los números críticos son $x = \pm \frac{9}{\sqrt{7}}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en uno de los puntos extremos del dominio $[0, 8]$, evaluemos T en los tres puntos:

$$T(0) = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{81}{7}+9}}{6} + \frac{8-\frac{9}{\sqrt{7}}}{8} \approx 1,33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1,42$$

Dado que el menor valor de estos valores de T se tiene cuando $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$, el valor mínimo de T debe estar allí. Por consiguiente, el hombre debe anclar al otro lado del río en un punto $\frac{9}{\sqrt{7}}$ corriente abajo del punto de partida.

Ejemplos. 29.

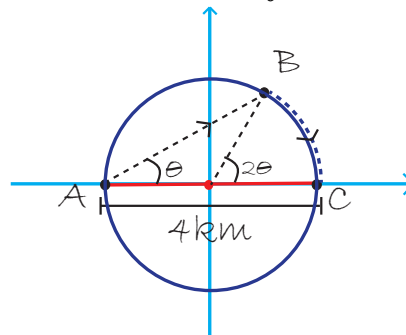
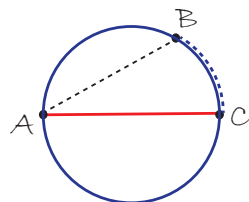
- Una mujer que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular con radio de $2km$ desea llegar al punto C , opuesto al A sobre el otro lado del lago remando y caminando, en el tiempo más corto posible. Puede caminar a razón de $4k/h$ y remar en un bote a $2k/h$. En qué ángulo en relación con el diámetro debe remar? [2]

- Comprender el problema.** La incógnita es el lugar de desembarque al otro lado del lago. Las cantidades dadas son el diámetro del lago, velocidad de la mujer remando y caminando. La condición dada es gastar el menor tiempo posible para llegar al punto C .



c) Introducir variables y notación.

b) Dibujo del problema.



- d) **Relacionar la información.** Sea $B = (x, y)$ un punto sobre la playa circular. Entonces la distancia por caminar es el arco $|\widehat{BC}| = (2\theta)2 = 4\theta$ y la distancia por remar es $|AB| = \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 0)^2}$. Si suponemos que la velocidad del agua es de 0 km/h y aplicamos la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rango}}$$

- e) **Despejar la función de interés.** Entonces el tiempo que tiene que remar es $\frac{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}{2}$ y el que debe caminar es $\frac{4\theta}{4}$, de modo que el tiempo total T , como función de x e y y θ , es

$$T(x, y, \theta) = \frac{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}{2} + \theta$$

Recordemos que el punto $B = (x, y)$ satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, entonces $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, consideremos la parte positiva, por lo tanto:

$$\begin{aligned} T(x, \sqrt{4 - x^2}, \theta) &= \frac{\sqrt{(x+2)^2 + (\sqrt{4 - x^2})^2}}{2} + \theta \\ T(x, \theta) &= \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4 + 4 - x^2}}{2} + \theta \\ &= \frac{\sqrt{8 + 4x}}{2} + \theta \\ &= \frac{\sqrt{8 + 4x}}{2} + \theta \end{aligned}$$

Y si utilizamos coordenadas polares obtenemos es decir $x = r \cos(2\theta) = 2 \cos(2\theta)$, por consiguiente la función tiempo queda:

$$T(\theta) = \frac{\sqrt{8 + 8 \cos(2\theta)}}{2} + \theta$$



$$\begin{aligned}
T' &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} (8 + 8 \cos(2\theta))^{-\frac{1}{2}} 8(-\sin(2\theta))(2) + 1 & -1 &= \frac{-2 \sin(2\theta)}{\sqrt{8 + 8 \cos(2\theta)}} \\
&= \frac{1}{4} \frac{-8 \sin(2\theta)}{\sqrt{8 + 8 \cos(2\theta)}} + 1 & 1 &= \frac{4 \sin^2(2\theta)}{8 + 8 \cos(2\theta)} \\
&= \frac{-2 \sin(2\theta)}{\sqrt{8 + 8 \cos(2\theta)}} + 1 & 8 + 8 \cos(2\theta) &= 4 \sin^2(2\theta) \\
T' &= 0 & 8 + 8 \cos(2\theta) &= 4 - 4 \cos^2(2\theta) \\
0 &= \frac{-2 \sin(2\theta)}{\sqrt{8 + 8 \cos(2\theta)}} + 1 & 4 \cos^2(2\theta) + 8 \cos(2\theta) + 4 &= 0 \\
& & \cos^2(2\theta) + 2 \cos(2\theta) + 1 &= 0
\end{aligned}$$

f) **Aplicar los métodos.** La derivada de T es:

Para poder encontrar las raíces a esta ecuación, primero debemos hacer un cambio de variable, sea $m = \cos(2\theta)$, entonces obtenemos

Despejamos la variable θ

$$\begin{aligned}
m^2 + 2m + 1 &= 0 & \cos(2\theta) &= -1 \\
(m + 1)^2 &= 0 & 2\theta &= \arccos(-1) \\
m + 1 &= 0 & 2\theta &= 180 \\
m &= -1 & \theta &= 90 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto los números críticos son $\theta = 90 = \frac{\pi}{2}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en uno de los puntos extremos del dominio $[0, \pi]$, evaluemos T en los tres números:

$$\begin{aligned}
T(0) &= \frac{\sqrt{16}}{2} = 2h \\
T(\pi) &= \frac{\sqrt{16}}{2} + \pi \approx 5,14h & T(\pi/2) &= \frac{\sqrt{0}}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 1,57h
\end{aligned}$$

Dado que el menor valor de estos valores de T se tiene cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, el valor mínimo de T debe tener allí. Por consiguiente, la mujer debe caminar alrededor de la playa para llegar más rápido al otro lado del lago.

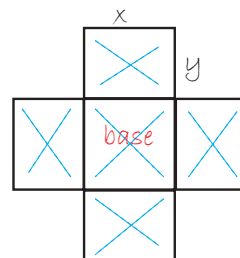
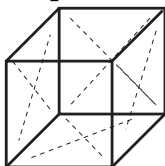
- Si se cuenta con 1200cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja. [7]



- a) **Comprender el problema.** La incógnita es el volumen de un cubo. La cantidad dada es la porción de material para utilizar. Las condiciones dadas son la base cuadrada y no tener tapa la caja.

- c) **Introducir variables y notación.**

- b) **Dibujo del problema.**



- d) **Relacionar la información.** El área de la pieza que se debe utilizar para hacer el cubo es de $x^2 + 4xy = 1200\text{cm}^2$. Y la función que se desea maximizar es

$$V = \text{anchura} * \text{altura} * \text{profundidad} = (x)(x)(y) = x^2y$$

- e) **Despejar la función de interés.** Podemos despejar a y en la ecuación del perímetro, entonces $y = \frac{1200-x^2}{4x} = \frac{300}{x} - \frac{x}{4}$. Para así poder reemplazar en la otra función, es decir,

$$V = x^2 \left(\frac{300}{x} - \frac{x}{4} \right) = 300x - \frac{x^3}{4}$$

- f) **Aplicar los métodos.** La derivada de V es:

$$V' = 300 - \frac{3}{4}x^2$$

$$0 = 300 - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 300$$

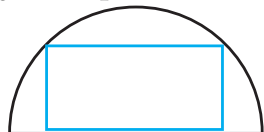
$$x^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 20$$

Su segunda derivada es: $V''(x) = -\frac{6}{4}x$. Por lo tanto si evaluamos a $x = \pm 20$ en la segunda derivada obtenemos que $x = 20$ es un máximo y $x = -20$ es un mínimo de V , ahora $y = 10$. Por consiguiente el volumen máximo es $V = 20^2(10) = 4000$

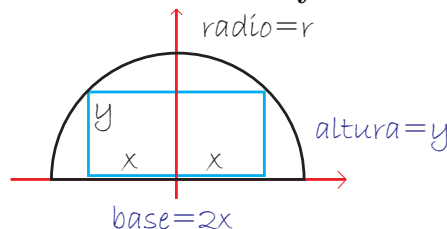
3. Se inscribe un rectángulo en un semi-círculo de radio r . Encuentre las dimensiones máximas del rectángulo inscrito. [7]

- a) **Comprender el problema.** La incógnita es el volumen de un rectángulo. La cantidad dada es el radio de la semi-circulo. La condición dada es que el rectángulo debe estar inscrito en el semi-circulo.

b) **Dibujo del problema.**



c) **Introducir variables y notación.**



- d) **Relacionar la información.** La ecuación de la semi-circunferencia es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y la función que deseamos maximizar es

$$V = base * altura = (2x)(y) = 2xy$$

- e) **Despejar la función de interés.** Podemos reemplazar y en el volumen V , entonces, $V = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$

f) **Aplicar los métodos.**

La derivada de V es:

$$\begin{aligned} V' &= 2\sqrt{r^2 - x^2} + (2x)\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\ &= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= \frac{2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= 0 \\ 0 &= \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ 0 &= 2r^2 - 4x^2 \\ 4x^2 &= 2r^2 \\ x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}r \end{aligned}$$

Como x debe ser positiva, entonces tenemos un número crítico $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Por el criterio de la segunda derivada tenemos que $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ es un máximo, Por consiguiente $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ y el volumen máximo del rectángulo inscrito en el semi-circulo es: $V = 2xy = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r^2$

4.3. Ejercicios

1. Trazar la gráfica de las siguientes funciones, hallando: puntos críticos, máximos y mínimos, dónde crece o decrece la función, puntos de inflexión y concavidad.



- a) $f(x) = x^3 + x - 1$
- b) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$
- c) $h(x) = 2x^3 - 6x + 4$
- d) $t(x) = x^2 - 4x - 1$
- e) $f(x) = (2x)^3 - 2x^2 - 16x + 1$
- f) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-6}$
- g) $h(x) = \frac{3}{x^2-3x}$
- h) $t(x) = \sqrt{x+5}$
- i) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
- j) $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- k) $h(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$
- l) $t(x) = (-2+x)^{-2}$
- m) $f(x) = 2 \sin(x)$ en $[0, 2\pi]$
- n) $g(x) = 3 \cos(2x)$ en $[0, \pi]$
- $\tilde{n}$) $h(x) = 8 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ en $[-2\pi, 2\pi]$
- o) $t(x) = (-1+x)^{\frac{3}{2}}$

2. Resuelva los siguientes problemas de optimización: Tomados de [7]

- a) Se desea abrir una ventana rectangular en la pared de una casa, y que su costo sea lo más económico posible sin perder luz. Para ello, se proyecta que su área sea de $\frac{16}{15}m^2$ con un costo vertical de 50 euros/m y horizontal de 30 euros/m. Qué dimensiones debe tener?
- b) Queremos vallar una parcela rectangular de $200m^2$ de una finca aprovechando un muro ya existente. Cómo debe ser ese rectángulo para que el coste de la valla sea mínimo?
- c) Se quieren fabricar latas de refresco (cilíndricas) cuyo contenido sea de $\frac{1}{3}$ de litro, de manera que el costo de la lata sea mínimo. Halle su altura y el radio de la base. Mida las dimensiones de cualquier lata que tenga en casa y compruebe si se fabrican siguiendo ese criterio.



- d) En un campo, se quiere limitar una parcela de $24m^2$ por medio de una valla rectangular y además, dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?
- e) Entre los pares de números cuyo producto es 64, encuentre aquellos positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.
- f) Un círculo de diámetro $8cm$ se divide en dos trozos para formar los diámetros de otros dos círculos. Halle la medida de los trozos para que la diferencia entre el área del círculo grande y las de los dos pequeños, sea máxima.
- g) Halle los puntos de la curva $y^2 = x$ cuya distancia al punto $(\frac{3}{2}, 0)$ sea mínima.
- h) Una hoja de papel debe contener $288cm^2$ de texto impreso. Las márgenes superior e inferior deben tener $2cm$ cada uno y los laterales $1cm$. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?
- i) La vidriera de una iglesia está formada por un rectángulo y sobre él una semicircunferencia. Si se quiere que el perímetro sea mínimo y que el área sea $8 + 2\pi m^2$, cuáles deben ser las dimensiones de la vidriera?
- j) Se desea construir un círculo y un cuadrado con 4 metros de alambre. Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que las dos, encierren el área mínima posible?
- k) Dado un cilindro de volumen $4m^3$, determine sus dimensiones para que su área total, sea mínima.
- l) Inscriba un cilindro circular en una esfera de radio $1m$. El cilindro debe tener: Volumen máximo y área lateral máxima, en ambos casos, determine sus dimensiones, radio de la base y altura.
- m) El alcance R de un proyectil lanzado con velocidad inicial v_0 y con un ángulo θ respecto de la horizontal es $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Calcule el ángulo θ que produce el alcance máximo.
- n) Se lanza un cuerpo hacia arriba con velocidad inicial $40m/s$. Calcule cuál es la máxima altura que alcanzará si la aceleración de la gravedad es $10m/s^2$. La ecuación que describe la altura en función del tiempo es: $h(t) = vt - g/2t^2$.



CAPÍTULO 5

Introducción al Cálculo Integral

En este último capítulo, solamente estudiaremos tres reglas para la integración de funciones. Las cuales son: integrar buscando su función primitiva, integrar por sustitución directa e integrar por partes. Este capítulo también fue tomado de las *Notas de Análisis Matemático*, curso dictado por Leonardo Solanilla en la Universidad del Tolima. [5]

5.1. Definición de la Integral de Riemann

Definición. 18. Sea g una primitiva de f en un intervalo I , $x_1, x_2 \in I$. La integral de f en x_1 a x_2 es

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = g(x_2) - g(x_1) = g(x) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Por abuso del lenguaje, seguimos escribiendo $g' = f$ a pesar de que esto cumple en casi todo I .

Ejemplos. 30.

1. Si $h(x) = e^x$ su integral en el intervalo $[-1, 1]$ es:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h(x)dx &= \int_{-1}^1 e^x dx \\ &= e^x \Big|_{-1}^1 \\ &= (e^1) - (e^{-1}) \\ &= e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} \end{aligned}$$



2. Si $f(x) = x^2 + x + 1$ su integral en el intervalo $[-1, 1]$ es:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 (x^2 + x + 1)dx \\
 &= \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 dx \\
 &= \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + x \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \left(\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + (1) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

3. Si $g(x) = 2x^3 + 3x^{-4} + 1$ su integral en el intervalo $[-3, 2]$ es:

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^2 g(x)dx &= \int_{-3}^2 (2x^3 + 3x^{-4} - 1)dx \\
 &= 2 \int_{-3}^2 x^3 dx + 3 \int_{-3}^2 x^{-4} dx - \int_{-3}^2 dx \\
 &= \left(2 \frac{x^{3+1}}{3+1} + 3 \frac{x^{-4+1}}{-4+1} - x \right) \Big|_{-3}^2 \\
 &= \left(2 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^{-3}}{-3} - x \right) \Big|_{-3}^2 \\
 &= \left(\frac{x^4}{2} - x^{-3} - x \right) \Big|_{-3}^2 \\
 &= \left(\frac{(-3)^4}{2} - \frac{1}{(-3)^3} - (-3) \right) - \left(\frac{(2)^4}{2} - \frac{1}{(2)^3} - (2) \right) = \frac{16270}{432}
 \end{aligned}$$

4. Si $t(x) = \frac{1}{x}$ su integral en el intervalo $[1, 2]$ es:

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 t(x)dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\
 &= \ln x \Big|_1^2 \\
 &= (\ln 2) - (\ln 1) = \ln 2
 \end{aligned}$$



5.2. Propiedades de la Integral de Riemann

5.2.1. Integración por Sustitución

Teorema. 22. Sean I, J intervalos cerrados, h una primitiva de una función admisible en I y $h(I) \subset J$. Sea $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces $\forall x_1, x_2 \in I$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi = \int_{h(x_1)}^{h(x_2)} f(y)dy$$

Demostración. Por definición tenemos que

$$\int_{h(x_1)}^{h(x_2)} f(y)dy = g(h(x_2)) - g(h(x_1))$$

Donde g es una primitiva de f

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi$$

$f(h(\xi))$ es continua, $h'(\xi)$ es admisible y $f(h(\xi))h'(\xi)$ es admisible por lo tanto tiene primitiva

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi = g(h(x)) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

◇

Ejemplos. 31.

1. Si $f(x) = (x^2 + 1)^3 x$ su integral en el intervalo $[-1, 2]$ es: Sea $y = x^2 + 1$, entonces $dy = 2x dx$, es decir $x dx = \frac{dy}{2}$, los nuevos límites de integración son $y(-1) = 2$ y $y(2) = 5$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x)dx &= \int_{-1}^2 (x^2 + 1)^3 x dx \\ &= \int_2^5 (y)^3 \frac{dy}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^5 y^3 dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} \right) \Big|_2^5 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{(5)^4}{4} \right) = \frac{1}{2} \frac{(-609)}{4} = -\frac{609}{8} \end{aligned}$$



2. Si $g(x) = \sin(x^2)2x$ su integral en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es: Sea $w = x^2$, entonces $dw = 2xdx$ y los nuevos límites de integración son $w(-\pi) = \pi^2$ y $w(\pi) = \pi^2$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^2)2xdx \\ &= \int_{\pi^2}^{\pi^2} \sin(w)dw \\ &= \sin(w)|_{\pi^2}^{\pi^2} = 0\end{aligned}$$

3. Si $h(x) = e^{-x^3}x^2$ su integral en el intervalo $[-1, 1]$ es: Sea $n = -x^3$, entonces $dn = -3x^2dx$, es decir, $-\frac{dn}{3} = x^2dx$ y los nuevos límites de integración son $n(-1) = 1$ y $n(1) = -1$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 h(x)dx &= \int_{-1}^1 e^{-x^3}x^2dx \\ &= \int_1^{-1} e^n \left(-\frac{dn}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3} \int_1^{-1} e^n dn = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 e^n dn \\ &= \frac{1}{3} e^n \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{3}(e^1 - e^{-1}) = \frac{1}{3} \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{e^2 - 1}{3e}\end{aligned}$$

4. Si $t(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}(2x + 1)$ su integral en el intervalo $[1, 2]$ es:

$$\begin{aligned}\int_1^2 t(x)dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \ln x \Big|_1^2 \\ &= (\ln 2) - (\ln 1) = \ln 2\end{aligned}$$

5.2.2. Integración por Partes

Teorema. 23. Sean f, g primitivas de funciones admisibles definidas en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$ si $x_1, x_2 \in I$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx$$



Demostración. La derivada del producto está dada por

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Entonces fg es una primitiva de $f'g + fg'$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

◇

Ejemplos. 32.

1. Hallar $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Tomamos $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x$; y $g'(x) = e^{x^2} x dx$ entonces $g(x) = \int g'(x)dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$ (por sustitución). Aplicando el teorema 23 tenemos:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ &= x^2 \frac{1}{2}e^{x^2} - \int 2x \frac{1}{2}e^{x^2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) \end{aligned}$$

2. Hallar $\int \ln(x^2 + 2)dx$.

Tomamos $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ entonces $f'(x) = \frac{2x dx}{x^2 + 2}$; y $g'(x) = dx$ entonces $g(x) = x$.
Aplicamos el teorema 23



$$\begin{aligned}
\int \ln(x^2 + 2)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\
&= x \ln(x^2 + 2) - \int \frac{2x}{x^2 + 2}x \\
&= x \ln(x^2 + 2) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 2}dx \\
&= x \ln(x^2 + 2) - 2 \int \left(1 - \frac{2}{x^2 + 2}\right) dx \text{ suma de fracciones} \\
&= x \ln(x^2 + 2) - 2 \left(\int dx - \int \frac{2}{x^2 + 2}dx \right) \\
&= x \ln(x^2 + 2) - 2x - \int \frac{2}{x^2 + (\sqrt{2})^2}dx \text{ derivada trigonométrica inversa} \\
&= x \ln(x^2 + 2) - 2x + 2\sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

3. Hallar $\int x\sqrt{1+x}dx$.

Tomamos $f(x) = x$ entonces $f'(x) = dx$; y $g'(x) = \sqrt{1+x}$ entonces $g(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$.
Aplicamos el teorema 23

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+x}dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\
&= x\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx \text{ sustitución simple} \\
&= \frac{2}{3}x\sqrt{(1+x)^3} - \frac{2}{3} \int (1+x)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{2}{3}x\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

4. Hallar $\int x \sin(x)dx$.

Tomamos $f(x) = x$ entonces $f'(x) = dx$; y $g'(x) = \sin(x)$ entonces $g(x) = -\cos(x)$.
Aplicamos el teorema 23



$$\begin{aligned}
\int x \sin(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\
&= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx \\
&= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x)
\end{aligned}$$

5.2.3. Monotonicidad de la Integral

Teorema. 24. Sean $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones admisibles con primitivas g_1, g_2 respectivamente si $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que $f_1(x) \leq f_2(x)$ o sea $g_1'(x) \leq g_2'(x)$

$$g_1'(x) - g_2'(x) \leq 0$$

$$(g_1(x) - g_2(x))' \leq 0$$

por Lema en el intervalo $[a, b]$

$$\begin{aligned}
(g_1 - g_2)(b) - (g_1 - g_2)(a) &\leq (b - a)0 \\
g_1(b) - g_2(b) - g_1(a) + g_2(a) &\leq 0 \\
g_1(b) - g_1(a) &\leq g_2(b) - g_2(a) \\
\int_a^b f_1(x) dx &\leq \int_a^b f_2(x) dx
\end{aligned}$$

◇

5.2.4. Teorema del Valor Medio para Integrales

Teorema. 25. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$



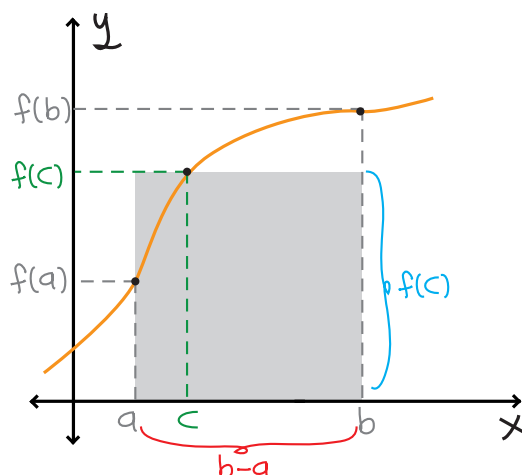


Figura 5.1: Valor Medio para Integrales

5.2.5. Fórmulas básicas de integración

$$\boxtimes \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\boxtimes \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\boxtimes \int af(x)dx = a \int f(x)dx \text{ donde } a \text{ es una constante arbitraria.}$$

$$\boxtimes \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \text{ para todo real } m \neq -1.$$

$$\boxtimes \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C.$$

$$\boxtimes \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} \ln(x) + C, \text{ para todo } a > 0, a \neq 1.$$

$$\boxtimes \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\boxtimes \int \sin(x)dx = -\cos(x) + C.$$

$$\boxtimes \int \cos(x)dx = \sin(x) + C.$$

$$\boxtimes \int \tan(x)dx = \ln(\sec(x)) + C.$$

$$\boxtimes \int \cot(x)dx = \ln(\sin(x)) + C.$$

$$\boxtimes \int \sec(x)dx = \ln(\sec(x) + \tan(x)) + C.$$

$$\boxtimes \int \csc(x)dx = \ln(\csc(x) - \cot(x)) + C.$$

$$\boxtimes \int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C.$$



$$\boxtimes \int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C.$$

$$\boxtimes \int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + C.$$

$$\boxtimes \int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + C.$$

5.3. Ejercicios

1. Hallar las siguientes integrales definidas en el punto dado:

a) $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 5) dx$, en $[-1, 1]$

b) $\int (4\sqrt{x^3} + 3x^2 + 2\sqrt{x} + \sqrt{5}) dx$, en $[0, 2]$

c) $\int 4\sqrt{2x+1} dx$, en $[1, 3]$

d) $\int 4\sqrt{2x^2+1} x dx$, en $[-2, 2]$

e) $\int \sqrt{2x^4+1} x^3 dx$, en $[-1, 1]$

f) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx$, en $[2, 4]$

2. Hallar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int \frac{1}{3x+1} dx$

c) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$

d) $\int \frac{x-1}{x+1} dx$

e) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2} dx$

f) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$

g) $\int \frac{e^x-2}{x^3} dx$

h) $\int (e^x + 1)^2 dx$

i) $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx$

j) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx$

k) $\int \tan^2(x) dx$

l) $\int \sin^2(x) dx$

m) $\int \cos(2x) dx$



$$n) \int (\cos(2x) - \sin(2x))^2 dx$$

3. Hallar las siguientes integrales por partes:

$$a) \int x \cos(x) dx$$

$$b) \int x \sec^2(3x) dx$$

$$c) \int x^2 \sqrt{1-x} dx$$

$$d) \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$$

$$e) \int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$f) \int \sin^3(x) dx$$

$$g) \int x^2 e^{-3x} dx$$

$$h) \int \sin(x) \sin(3x) dx$$



Bibliografía

- [1] Apostol, Tom M. *Calculus*, volumen I, Wiley, 1967.
- [2] Larson, Ron & Hostetler, Robert P. *Cálculo 1 de una variable*. McGraw-Hill, Novena edición, 2010.
- [3] James Stewart, *Cálculo Diferencial e Integral*. International Thomson Editores, 1998.
- [4] Louis Leithold, *El cálculo*. Séptima edición. Oxford university press - Harla México , 1994.
- [5] Leonardo Solanilla, Javier G Rivera G, *Notas de Análisis Matemático*. Universidad del Tolima, 2010. <http://leonardosolanilla.com/pdfs/anamatI.pdf> (SIN PUBLICAR)
- [6] Arnold Oostra, Javier G Rivera G. *Notas de Geometria Diferencial*. Universidad del Tolima, 2011. (SIN PUBLICAR).
- [7] Mario R. Hurtado, Myriam C. Guerrero P., Nyckyiret F. Barreto, Carlos A. Montea-
legre G., Maximiliano M. Higuera, *Notas Universitarias: Taller de Cálculo I*. segunda
edición. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, área Matemática. Universidad
de Ibagué. Ibagué, Colombia. Enero de 2012
- [8] http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_trascendente.

