

NOTAS DE VARIABLE COMPLEJA

LEONARDO SOLANILLA

DIGITADO POR JAVIER G. RIVERA G.



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

IBAGUÉ, JUNIO DE 2010

RESUMEN. dfg hj

Índice general

1. Números Complejos	8
1.1. Nociones de partida	8
1.2. Representación de los complejos	11
1.3. Representación gráfica	12
1.3.1. Transformaciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	12
1.4. Multiplicación Compleja	13
1.5. Simetria en $\mathbb{C}$	15
1.6. Consecuencias	15
1.7. Ejercicios	18
2. Topología $\mathbb{C}$	20
2.1. Conceptos principales	20
2.2. Sucesiones	21
2.3. Regiones y Funciones	21
2.4. Limites y Continuidad	23
3. Diferenciabilidad $\mathbb{C}$	25
3.1. Diferenciación Compleja	25
3.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	27
3.3. Ejercicios Resueltos	28
3.4. Funciones Importantes	31
3.4.1. Exponencial	31
3.4.2. Trigonométricas	32
3.4.3. Hiperbólicas	35
3.4.4. Análisis de e^z	35
3.4.5. Logarítmica	37

3.4.6. Potencia	41
3.5. Funciones Armónicas	42
4. Integral Compleja	46
4.1. Curvas	46
4.2. Propiedades de la integral	48
4.3. Mas propiedades de la integral	50
4.4. Acercamiento al teorema de Cauchy	53
4.5. Teorema Integral de Cauchy	56
4.6. Fórmula Integral de Cauchy	59
4.7. Consecuencias	64

Índice de figuras

1.1. Plano Complejo	13
1.2. Traslación	13
1.3. Conjugación	14
1.4. $\arg \alpha = \theta = \text{Argumento de } \alpha$	14
1.5. Raíces cubicas de $z = i$	17
1.6. Raíces cuadradas de $z = -4$	18
2.1. (a) Línea poligonal. (b) Conjunto conexo y desconexo.	22
2.2. Proyección Estereográfica	23
3.1. Gráfica e^z	36
3.2. Transformación del rectángulo con e^z	38
3.3. Transformación del $\log z$	39
4.1. Curva $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$	46
4.2. Tipos de curvas	47
4.3. Invarianza respecto a la parametrización	51
4.4. Posibilidades de $\delta(\tau) = t$	51

CAPÍTULO 1

Números Complejos

Dotando al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con las operaciones binarias obtenemos un campo, dicho de otro modo un anillo conmutativo. De igual manera, en este capítulo, al querer dotar a $\mathbb{R}^2$ con la estructura de campo aparece la multiplicación de i , donde $i^2 = (0, 1)^2 = -1$, esta unidad “imaginaria” resulta ser un elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Allí nace el nuevo conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ que es más grande que el de los números reales $\mathbb{R}$. Donde resultan propiedades interesantes, tales como, la representación algebraica y geométrica, la interpretación geométrica de la multiplicación en términos de rotaciones del espacio euclidiano de dos dimensiones y con sus consecuencias.

1.1. Nociones de partida

Un número complejo esta dado de la forma $z = a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $i^2 = -1$. i es llamada la unidad imaginaria.

Definición 1. Sean z y w dos número complejos cualesquiera diferentes $z \neq w$, se pueden dotar de las siguientes operaciones binarias:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \\ z \cdot w &= (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como conjunto, los complejos forman el conjunto

$$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

En particular, $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. Es posible dotar a $\mathbb{C}$ con una estructura algebraica de campo con división con las operaciones binarias anteriores y se denota $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$.

Ahora bien:

- ✦ Si $\alpha = a + ib$, $\bar{\alpha} = a - ib$ llamado el conjugado de α .
- ✦ Los números reales a, b se llaman parte real y parte imaginaria, respectivamente, de z . Escribiremos $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = a$ y $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = b$.
- ✦ Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ y $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$.
- ✦ Si $\alpha = a + ib \neq 0$, $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ el cual es el inverso de α .
- ✦ Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ es el modulo ó valor absoluto de α , también se puede ver así $|\beta|^2 = \beta\bar{\beta}$.

$$\checkmark |\alpha| \geq 0, \quad \checkmark |\alpha| = 0 \text{ si y solo si } \alpha = 0, \quad \checkmark |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Entonces los complejos son también un espacio vectorial normado. El cual posee algunas propiedades:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= |\bar{\alpha}|, & |Im(\alpha)| &< |\alpha|, \\ |\alpha\beta| &= |\alpha||\beta|, & ||\alpha| - |\beta|| &\leq |\alpha - \beta|, \\ \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| &= \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \beta \neq 0, & |\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n| &= |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_n|. \\ |Re(\alpha)| &< |\alpha|, \end{aligned}$$

Desigualdad Triangular. Sea $\gamma = \alpha\bar{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma + \bar{\gamma} &= \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\bar{\beta}} \\ &= 2Re(\alpha\bar{\beta}) \end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) & |z|^2 &= z\bar{z} \\
&= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\
&= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} \\
&= |\alpha|^2 + \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\bar{\beta}} + |\beta|^2 \\
&= |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2 \\
&\leq |\alpha|^2 + 2|\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})| + |\beta|^2 & a &\leq |a| \text{ si } a \in \mathbb{R} \\
&\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\bar{\beta}| + |\beta|^2 & |\operatorname{Re}(z)| &< |z| \\
&= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\bar{\beta}| + |\beta|^2 \\
&= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 & |z| &= |\bar{z}| \\
&= (|\alpha| + |\beta|)^2
\end{aligned}$$

Luego aplicando raíz cuadrada en ambos lados obtenemos:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

◇

Cota inferior de la diferencia. Miremos las cuotas de $|\alpha|$ y $|\beta|$

$$\begin{aligned}
|\beta| &= |\beta + \alpha - \alpha| \\
&= |(\beta - \alpha) + \alpha| & |\alpha| &= |\alpha + \beta - \beta| \\
&\leq |\beta - \alpha| + |\alpha| & &= |(\alpha - \beta) + \beta| \\
& & &\leq |\alpha - \beta| + |\beta| \\
|\beta| - |\alpha| &\leq |\beta - \alpha| & |\alpha| - |\beta| &\leq |\alpha - \beta| \quad \spadesuit \\
-(|\alpha| - |\beta|) &\leq |\alpha - \beta| \\
-|\alpha - \beta| &\leq |\alpha| - |\beta| \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Ahora si unimos a $\clubsuit$ y $\spadesuit$ obtenemos la definición de valor absoluto en los reales:

$$\begin{aligned}
-|\alpha - \beta| &\leq |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \\
||\alpha| - |\beta|| &\leq |\alpha - \beta|
\end{aligned}$$

◇

1.2. Representación de los complejos

Ya hemos visto dos representaciones de los números complejos, vectorial (a, b) la cual se utiliza para gráficas y estándar $a + ib$, además de esta existe otra representación que llamaremos matricial, resulta de descomponer el producto de dos complejos en un producto de dos matrices.

$$\begin{aligned}
 zw &= (a + ib)(c + id) \\
 &= (ac - bd) + i(bc + ad) \\
 &= \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Los complejos se corresponde con las matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$. Sea M la matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Proposición 1. *Es un isomorfismo de campos la siguiente aplicacion*

$$\begin{aligned}
 \phi : \mathbb{C} &\rightarrow M \\
 a + ib &\mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Demostración.

✓. ϕ es biyectiva.

$$\begin{aligned}
\phi(z+w) &= \phi(a+ib+c+id) \\
&= \phi((a+c)+i(d+b)) \\
&= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
&= \phi(a+ib) + \phi(c+id) \\
&= \phi(z) + \phi(w)
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
\phi(zw) &= \phi((a+ib)(c+id)) \\
&= \phi((ac-bd)+i(ad+bc)) \\
&= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
&= \phi(a+ib)\phi(c+id) \\
&= \phi(z)\phi(w)
\end{aligned}$$

◇

El grupo ortonormal especial, abreviado usualmente $SO(n)$, es un grupo de *Lie* que puede ser representado como un subgrupo del grupo ortogonal $O(n)$. El grupo real $SO(n)$ se puede identificar con el grupo de rotaciones del espacio $\mathbb{R}^n$. Sea pues

$$\hat{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Denotamos con $\hat{z}$ a los elementos de $\hat{\mathbb{C}}$. Es claro que todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ se puede escribir como $z = |z|\hat{z}$ para cierto $\hat{z} \in \hat{\mathbb{C}}$.

Proposición 2. *El grupo $\hat{\mathbb{C}}$ es isomorfo al grupo de rotaciones $SO(2)$.*

1.3. Representación gráfica

A cada número complejo le corresponde un par ordenado y viceversa.

$$\alpha = a + ib \longleftrightarrow (a, b)$$

1.3.1. Transformaciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

1. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ fijo, $f(z) = z + \alpha$ Traslación. Se cumple $|z - w| = |(z + \alpha) - (w + \alpha)|$, así $f(z) = \alpha + z$ es una isometría.
2. $f(z) = \bar{z}$ Conjugación. Se cumple $|\bar{z} - \bar{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|$, así $f(z) = \bar{z}$ es una isometría.

Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ entonces:

$|\beta - \gamma|$ es la distancia de β a γ .

$|\alpha - 0| = |\alpha|$ es la distancia de α al origen.

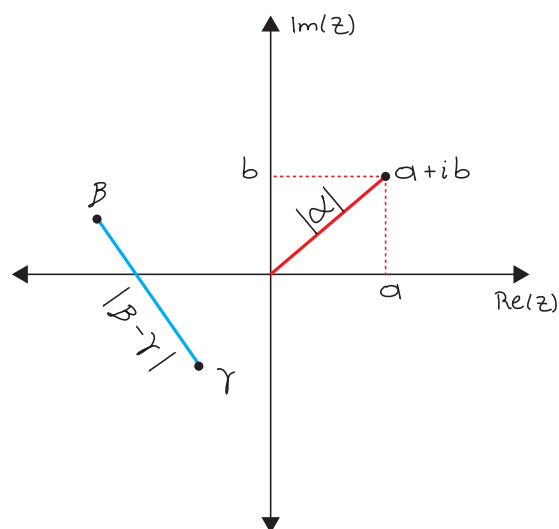


Figura 1.1: Plano Complejo

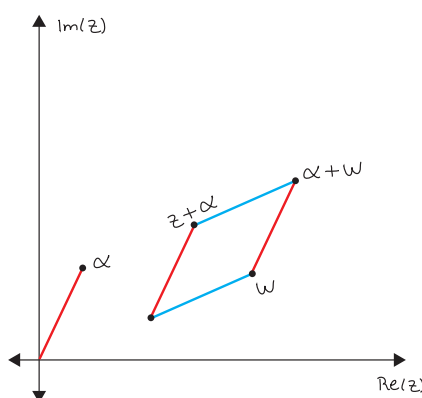


Figura 1.2: Traslación

3. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $f(z) = \alpha z$. No podemos y no tenemos aun el dibujo pero se cumple $|\alpha z - \alpha w| = |\alpha||z - w| = |z - w|$, así $f(z) = \alpha z$ es una isometría.

1.4. Multiplicación Compleja

Forma polar de un numero complejo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, entonces

$$\alpha = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

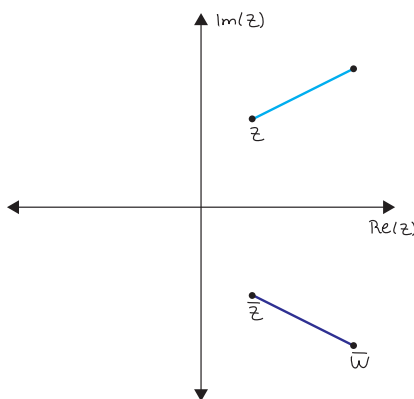
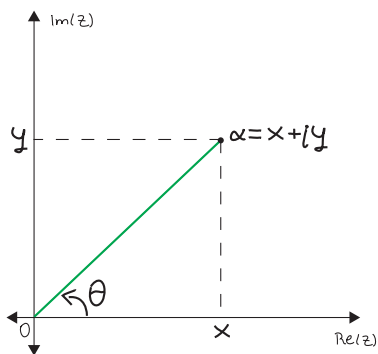


Figura 1.3: Conjugación

Figura 1.4: $\arg \alpha = \theta = \text{Argumento de } \alpha$

✠. El argumento no es único, ya que

$$\arg \alpha = \theta + 2\pi k \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \text{ representa un mismo ángulo.}$$

$$\arg \alpha = \theta (\text{mod } 2\pi)$$

✠. Argumento Principal de α , $\text{Arg} \alpha = \theta$, con $-\pi < \theta \leq \pi$

✠. Argumento Secundario de α , $\arg \alpha = \text{Arg} \alpha + 2\pi k = \text{Arg} \alpha (\text{mod } 2\pi)$

Ahora bien podemos mirar el producto de nos numeros complejos en coordenadas polares:

Producto complejo $z_1 z_2 = z_2 z_1$. Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con ángulos $\theta_1 \in \arg z_1$, $\theta_2 \in \arg z_2$ y módulos $r_1 = |z_1|$ y $r_2 = |z_2|$ respectivamente.

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

◇

El modulo del producto es el producto de los módulos. El argumento del producto es la suma de los argumentos en modulo 2π .

1.5. Simetria en $\mathbb{C}$

Una “simetria” es un invariante bajo un movimiento rígido. Todo movimiento rígido del plano es composición de rotaciones, reflexiones o traslaciones. A su vez, como se muestra en seguida, estos movimientos resultan de operaciones básicas con los números complejos.

- ★. **Rotación en ángulo α .** Se obtiene multiplicando: $R_\alpha(z) = ze^{\alpha i}$ En efecto, si $z = re^{\theta i}$ entonces $R_\alpha(z) = re^{(\theta + \alpha)i}$.
- ★. **Reflexión en ángulo β .** Se obtiene conjugando y multiplicando: $S_\beta(z) = ze^{2\beta i}$ De nuevo, si $z = re^{\theta i}$ entonces el ángulo entre el eje de z y el de reflexión es $\theta - \beta$. Como este mismo ángulo debe estar entre el eje de reflexión y el de $S_\beta(z) = re^{\beta' i}$, es $\beta' + (\beta - \theta) = \theta$, es decir, $\beta' = 2\beta - \theta$.
- ★. **Traslación en dirección c .** Se obtiene sumando: $T_c(z) = z + c$ Evidente.

1.6. Consecuencias

1. **Rotación:** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ fijo tal que $|\alpha| = 1$. Entonces $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z$ es una rotación por el argumento de α .

$$|f(z)| = |\alpha||z| = |z|$$

2. **Inverso:** Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

3. **Cociente:** Sea $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

4. Si $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ donde $j \in \mathbb{N}$ entonces

$$\prod_{j=1}^n z_j = \left(\prod_{j=1}^n r_j \right) \left[\cos \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right) + i \sin \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right) \right]$$

5. **Potenciación:** Si todos los z_j son iguales entonces $z_j = z$, entonces

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad (1.2)$$

Formula de **Moirve**. 1.2

6. **Radicación:** w es una raíz n -ésima de z si $w^n = z$. Así, si

$$w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{y} \quad z = |z|(\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

debemos tener que

$$w^n = |w|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = |z|(\cos \gamma + i \sin \gamma) = z$$

Entonces

a) $|w|^n = |z|$ entonces $|w| = \sqrt[n]{|z|}$

b) $\arg w^n = \arg z$ ósea $n\theta = \gamma + 2\pi k$ entonces $\theta = \frac{\gamma + 2\pi k}{n}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

En verdad basta tener

$$\theta = \frac{\gamma + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Ya que si $k = 0$ entonces $\theta_0 = \frac{\gamma}{n}$ y si $k = n$ entonces $\theta_k = \frac{\gamma}{n} + 2\pi$, por tanto

$$\theta_0 = \theta_k(\text{mod } 2\pi)$$

Las raíces n -ésima de z son

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= w \\ &= |w|(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\gamma + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\gamma + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Calcule y dibuje las raíces terceras de i .

$$w_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{|i|} \left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right) \right)$$

con $k = 0, 1, 2$ $|i| = 1$ y $\theta = \pi/2$ por tanto sus tres raíces son

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\left(\frac{\pi/2}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi/2}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w_1 &= \cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \cos\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) \\ &= -i \end{aligned}$$

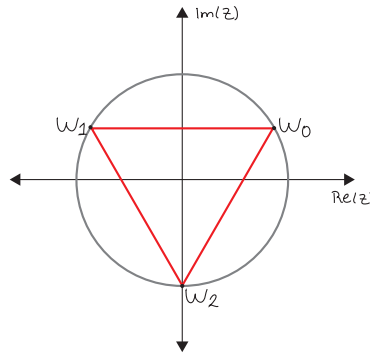


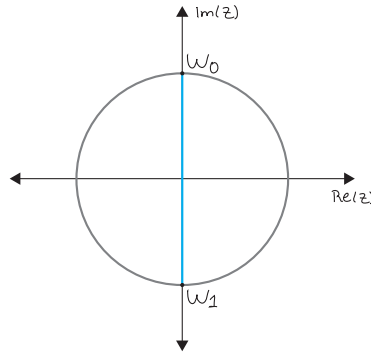
Figura 1.5: Raíces cúbicas de $z = i$

Ejemplo 2. Calcule y dibuje la raíz cuadrada de -4 .

$$w_k = \sqrt{-4} = \sqrt{|-4|} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{2}\right) \right)$$

con $k = 0, 1$ $|-4| = 4$ y $\theta = \pi$ por tanto sus dos raíces son

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) & w_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right)\right) \\
 &= 2i & &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\
 & & &= -2i
 \end{aligned}$$

Figura 1.6: Raíces cuadradas de $z = -4$

1.7. Ejercicios

1. Sea $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 + 3i$ y $\gamma = 5 + \sqrt{2}i$. Encuentre

- | | | |
|--|---------------------------------------|---|
| a. $\alpha\beta\gamma + 1$ | c. $\alpha\bar{\beta}i$ | e. $\frac{\beta-\gamma}{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}\bar{\alpha}i}$ |
| b. $\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma} - i$ | d. $\frac{\alpha-i}{1-\bar{\alpha}i}$ | f. $\frac{\gamma-\beta}{\alpha} + \frac{\alpha+\bar{\gamma}}{\gamma^{-1}} - \frac{\gamma\beta}{\beta+\gamma}$ |

2. Sea $\alpha = 2 - 2i$, $\beta = -5 - i$ y $\gamma = -3 + 6i$. Encuentre

- | | | |
|------------------------------------|--|--|
| a. $\alpha^2 + \beta^4 + \gamma^6$ | c. $\bar{\beta}^{15}$ | e. $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{10}$ |
| b. α^{20} | d. $\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\alpha}\right)^8$ | f. $\frac{(\gamma+\beta)^2}{\alpha^8} + \left(\frac{\alpha+\bar{\gamma}}{\gamma^{-1}}\right)^{12}$ |

3. Exprese su resultado en forma exacta de las siguientes raíces

- | | | |
|-------------------|------------------------------|--------------------------------|
| a. $\sqrt[2]{-1}$ | c. $\sqrt[6]{8}$ | e. $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$ |
| b. $\sqrt[3]{i}$ | d. $\sqrt[2]{1 - \sqrt{3}i}$ | f. $\sqrt[5]{1 + i}$ |

4. Calcule las formas polares de

a. $\frac{1}{i}$

c. $1 + \sqrt{3}i$

e. $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

b. $\frac{1}{1+i}$

d. $2 + 2i$

f. $\frac{1}{a+ib}$

5. Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes, y represéntelas en el plano complejo.

a. $z^2 + 1 = 0$

c. $z^5 = 1$

e. $e^z + 1 = 0$

b. $z^3 + 1 = 0$

d. $z^8 = \frac{i+i}{\sqrt{3}-i}$

f. $az^2 + bz + c = 0$

6. Sea $z, a \in \mathbb{C}$. Demuestre que si $|z| < 1$ y $|a| < 1$ entonces

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1.$$

CAPÍTULO 2

Topología $\mathbb{C}$

A continuación dotamos a los complejos con una estructura de espacio topológico homeomorfo al espacio euclidiano producto $\mathbb{R}^2$. Presentamos conceptos y resultados que se usarán más adelante. Ellos incluyen la descripción de los abiertos y los cerrados, las sucesiones, las aplicaciones continuas, los límites de funciones, los conjuntos conexos y conjuntos compactos. Se enfatizan, en particular, la aplicación y utilidad de estas nociones para el Análisis Matemático.

2.1. Conceptos principales

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 < r < \infty$, definimos los siguientes tipos de conjuntos.

$$B(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\} \text{ (Disco abierta.)}$$

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\} \text{ (Disco cerrada.)}$$

$$B^*(z_0, r) = B(z, r) - \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < r\} \text{ (Disco abierta sin centro.)}$$

$$\partial B(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\} \text{ (Frontera de una disco.)}$$

Una ϵ -vecindad de un número complejo z_0 es un disco abierto de radio ϵ , centrado en z_0 . Sea $S \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in S$. z_0 es un punto interior de S , si contiene una ϵ -vecindad de z_0 contenida en S . Si todos los puntos de S son interiores, S es abierto.

La unión de una colección cualquiera de conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto. La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto.

Un subconjunto A de $\mathbb{C}$ es cerrado si su complemento $A^c = \mathbb{C} - A$ es abierto.

La intersección de una colección arbitraria de subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ es un conjunto cerrado. La unión de una colección finita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ es un conjunto cerrado.

Un punto $z \in \mathbb{C}$ es un punto frontera de un conjunto B si para cada $r > 0$ la bola abierta $B(z, r)$ tiene intersección no vacía con A y A^c . El conjunto de todos los puntos frontera de A es la frontera de A , denotada como ∂A .

La clausura de un conjunto A está definida por $\overline{A} = A \cup \partial A$. El interior de A es el conjunto $\text{int}(A)$ de todos los puntos interiores a A .

2.2. Sucesiones

Una sucesión de complejos es una aplicación

$$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$n \mapsto z_n$$

Una sucesión de complejos $\langle z_n \rangle$ es convergente si existe un complejo z_0 tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero $N = N(\epsilon)$ tal que z_n está en la bola $B(z_0, \epsilon)$ para cada $n \geq N$. Este hecho se abrevia como $z_n \rightarrow z_0$ y equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0.$$

Una sucesión compleja $\langle z_n \rangle$ se puede escribir como $\langle z_n \rangle = (\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle)$, donde $\langle x_n \rangle$ y $\langle y_n \rangle$ son sucesiones reales.

$\langle z_n \rangle$ es convergente si y sólo si las sucesiones reales $\langle x_n \rangle$ y $\langle y_n \rangle$ son convergentes.

2.3. Regiones y Funciones

Sean $A_0, A_1, \dots, A_n, n+1$ números complejos. Los n segmentos $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ forman una línea quebrada ó poligonal $A_0A_1 \dots A_n$ que une a A_0 con A_n .

S es un conjunto conexo, si dados dos puntos $z_1, z_2 \in S$ existe una línea quebrada que une a z_1 con z_2 totalmente contenida en S .

Si S es conexo y abierto entonces S es un dominio.

Una región R es un dominio con ninguno, alguno o todos sus puntos frontera. Una

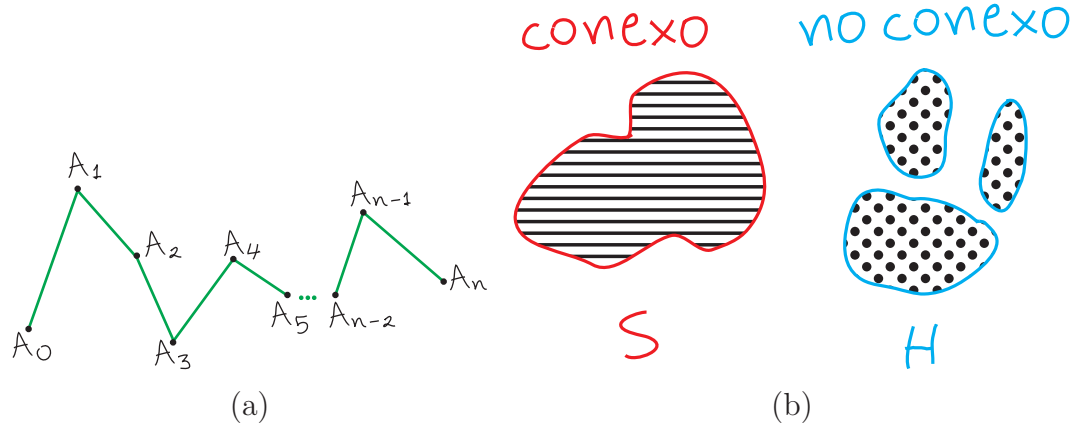


Figura 2.1: (a) Línea poligonal. (b) Conjunto conexo y desconexo.

region que contenga todos sus puntos frontera es un conjunto cerrado.

Sea R una region. La region forrada por R y sus puntos frontera es $\bar{R}$ (Clausura de R).

Si R es una region cerrada entonces $R = \bar{R}$.

Una region R es acotada si $|z| < M$, $M \in \mathbb{R}^+$, $\forall z \in R$.

Una region cerrada y acotada es compacta.

Sea R una region de $\mathbb{C}$ entonces una función compleja esta dada por

$$f : R \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto w = f(z)$$

Ejemplo 3. $R = \mathbb{C}$, $w = f(z) = z^2$ $R = \mathbb{C} - \{1\}$, $w = f(z) = \frac{z}{1-z}$

Las funciones se suman, multiplican y componen de manera usual. Se acostumbra escribir una función de variable compleja $f(z)$ de la forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

Ejemplo 4.

$$f(z) = z^2$$

$$= (x + iy)^2$$

$$= x^2 - y^2 + i(2xy)$$

Por tanto $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$

Algunos veces se adjunta un punto ideal “en el infinito” a los complejos. Notación: ∞ . Una ε -vecindad de ∞ es un conjunto de la forma

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$

El plano complejo extendido también se llama esfera de **Riemann**. **Proyección Estereográfica** homeomorfismo de $S^2 - \{N\}$ con $\mathbb{C}$.

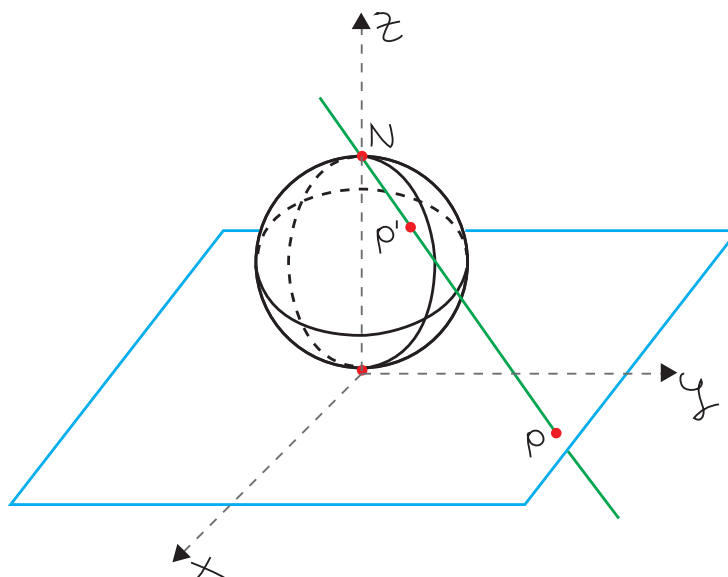


Figura 2.2: Proyección Estereográfica

2.4. Límites y Continuidad

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$$

Esto quiere decir que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

δ depende de ε .

Sean $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \beta$, la suma, la multiplicación, el cociente y entre otras propiedades de límites para dos variables se satisface en la Variable Compleja.

Se dice que $f(z)$ es continua en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

✚. Los polinomios son aplicaciones continuas.

✚. Si $f : R_1 \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : R_2 \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas en z_0 y en $f(z_0)$ respectivamente, con $f(z_0) \subseteq R_2$ entonces $(g \circ f)(z)$ es continua.

✚. $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$ es continua en z_0 si y solo si $f(z)$ es continua en z_0 .

✚. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua si y solo si u y v son continuas.

✚. Si f es continua, entonces $Re(f)$, $Im(f)$ y $|f(z)|$ son continuas.

Se dice que $f(z)$ es uniformemente continua en una region R si $\forall z_1, z_2 \in R$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

δ no depende de ε sino también de R .

Una función $f : \mathbb{C} \supseteq R \rightarrow \mathbb{C}$ con R compacto entonces

$$f(R) \text{ es compacta si } = \begin{cases} \text{uniformemente continua} \\ f(R) \text{ es acotada} \\ |f(z)| \text{ asume su valor máximo y su valor mínimo en } R \end{cases}$$

Teorema 1 (Teorema Fundamental del Algebra). *Si P es un polinomio no constante, $P(z)$ tiene siempre una raíz en $\mathbb{C}$.*

Teorema 2 (Teorema de Factorización). *Si P es un polinomio de grado $n \geq 1$ entonces P admite una factorización de la forma*

$$P(z) = c(z - z_1) + c(z - z_2) + \dots + c(z - z_n)$$

con $c, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

CAPÍTULO 3

Diferenciabilidad $\mathbb{C}$

3.1. Diferenciación Compleja

Sea $f : \mathbb{C} \supseteq R \rightarrow \mathbb{C}$ una función. f es diferenciable en $z_0 \in R$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \in R - \{z_0\} \text{ EXISTE!!!}$$

Esto equivale a la existencia de un $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \phi(z), \quad z \in R - \{z_0\}$$

donde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = 0, \quad z \in R - \{z_0\}$$

Cuando esto sucede, $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c$ es la derivada de f en z_0 . También si $z = z_0 + h$, entonces

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$$

Ejemplo 5. $f(z) = z^n$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \\ &= \frac{z_0^n + c_{n-1}z_0^{n-1}h + \dots + h^n - z_0^n}{h} \\ &= \frac{h(c_{n-1}z_0^{n-1} + c_{n-2}z_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1})}{h} \\ &= c_{n-1}z_0^{n-1} + c_{n-2}z_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1}, \quad \text{si } h \neq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) = c_{n-1}z^{n-1} = nz^{n-1}$$

♣ Todas las reglas de derivación en la variable real se cumplen. (Por ser $\mathbb{C}$ un campo)

Si $f, g : R \rightarrow \mathbb{C}$ son diferenciable en $z_0 \in R$, entonces

$$\checkmark. (f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$\checkmark. (f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$$

$\checkmark$. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Ejemplo 6. $P(z) = az^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$

$$P'(z) = anz^{n-1} + a_{n-1}(n-1)z^{n-2} + \dots + a_1$$

Teorema 3 (Regla de la Cadena). Si g es diferenciable en z y f es diferenciable en $g(z)$ entonces $(f \circ g)(z)$ es diferenciable en z y

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

Ejemplo 7. $f(z) = \bar{z}$ entonces $f(x + iy) = x - iy$. NO es $\mathbb{C}$ -diferenciable en ningún $z \in \mathbb{C}$. Consideremos

$$\frac{\overline{(z+h)} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

$$\text{Entonces } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

♦. Si $h \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = 1$

♦. Si $h \in im(z)$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$

Como tomamos dos acercamientos tales que los límites no existen, la derivada no existe. Es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} \text{ NO EXISTE!!!}$$

3.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si f es diferenciable en $z \in R$ donde $h = h_1 + ih_2$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y)}{h_1 + ih_2}$$

Si nos acercamos por $h_2 = 0$ (por la recta real), entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1, y) - f(x, y)}{h_1} &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h_1, y) + iv(x+h_1, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h_1, y) - u(x, y)}{h_1} + i \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x+h_1, y) - v(x, y)}{h_1} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x \end{aligned}$$

Si nos acercamos por $h_1 = 0$ (por la recta imaginaria), entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h_2) - f(x, y)}{ih_2} &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h_2) + iv(x, y+h_2) - u(x, y) - iv(x, y)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h_2) - u(x, y)}{ih_2} + i \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{v(x, y+h_2) - v(x, y)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{v(x, y+h_2) - v(x, y)}{h_2} - i \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h_2) - u(x, y)}{h_2} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = v_y - iu_y \end{aligned}$$

Como los límites deben ser iguales, entonces si una función es diferenciable en z se cumple que

$$u_x = v_y$$

$$v_x = -u_y$$

Llamadas las Ecuaciones de **Cauchy-Riemann**.

Recordemos que el jacobiano es $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$. Si f es $\mathbb{R}^2$ -diferenciable existe $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$. Si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable existe $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ y $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$

El recíproco no es cierto. Si las E.C. de Cauchy-Riemann existen entonces f NO necesariamente es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Teorema 4. Si u_x, v_y, v_x y u_y existen y son continuas en $z \in R$ y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z .

Otra forma que es equivalente a la anterior

Teorema 5. f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $z \in R$ Si y solo si f es $\mathbb{R}^2$ -diferenciable en (x, y) y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces en (x, y) .

Ejemplo 8. $f(z) = \bar{z} = x - iy$ entonces $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = -1$$

f es $\mathbb{R}^2$ -diferenciable. Pero no se cumplen las dos condiciones de las E.C. Cauchy-Riemann $u_x \neq v_y$ Por lo tanto f no es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

la diferenciabilidad en un punto z no es tan interesante.

Definición 2. f es holomorfa (ó analítica) en z_0 si f es diferenciable en una ε -vecindad $\varepsilon > 0$ de z_0 .

3.3. Ejercicios Resueltos

1. Muestre que $f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Se satisfacen las **E.C.R**(Ecuaciones de Cauchy Riemann) ¿?

Como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ por tanto $u(x, y) = \frac{1}{2} \log x^2 + y^2$ y $v(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ y sus derivadas parciales son:

✓.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

✓.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

✓.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} (-yx^{-2}) \\ &= -\frac{yx^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

✓.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} \\ &= -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} \\ &= -\frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Como $u_x = v_y$ y $v_x = -u_y$, la función cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann para $\mathbb{C} - \{Re(z) = 0\}$ las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y son $\mathbb{R}^2$ -diferenciables. Por lo tanto, $f(z)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\mathbb{C} - \{Re(z) = 0\}$

2. Mirar si $f(z) = \frac{3}{2}x^2 - xy + ixy^2$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Se satisfacen las **E.C.R.**?

Como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ por tanto $u(x, y) = \frac{3}{2}x^2$ y $v(x, y) = xy^2$ y sus derivadas parciales son:

✓.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x - y$$

✓.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y^2$$

✓.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x$$

✓.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2xy$$

Como $u_x \neq v_y$ y $v_x \neq -u_y$, la función NO cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann, entonces miremos en que puntos si se cumplen. Supongamos que si se cumplen entonces

$$\diamond u_x = v_y$$

$$\heartsuit v_x = -u_y$$

$$\diamond 3x - y = 2xy$$

$$\heartsuit y^2 = -(-x)$$

$$\diamond 3x - y - 2xy = 0$$

$$\heartsuit y^2 = x$$

Reemplazamos $\heartsuit$ en $\diamond$ donde obtenemos

$$\begin{aligned}
3y^2 - y - 2y^3 &= 0 \\
-y(2y^2 - 3y + 1) &= 0 \\
y(2y^2 - 3y + 1) &= 0 \\
y \frac{(2y)^2 - 3(2y) + 2}{2} &= 0 \\
y \frac{(2y - 2)(2y - 1)}{2} &= 0 \\
y(y - 1)(2y - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Así	x	y
	0	0
	1	1
	1/4	1/2

Por tanto los puntos donde f es $\mathbb{C}$ -diferenciable es en 0 , $1 + i$ y $\frac{1}{4} + \frac{i}{2}$.

3. Mirar si $f(z) = 2xy + i(x^2 + y^2)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Se satisfacen las **E.C.R.**?

Como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ por tanto $u(x, y) = 2xy$ y $v(x, y) = x^2 + y^2$ y sus derivadas parciales son:

✓.	$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y$	✓.	$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$
✓.	$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x$	✓.	$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

Como $u_x \neq v_y$ y $v_x \neq -u_y$, la función NO cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann, entonces miremos en que puntos si se cumplen. Supongamos que si se cumplen entonces

♣ $u_x = v_y$	♠ $v_x = -u_y$
♣ $2y = 2y$	♠ $2x = -2x$
♣ $y = y$	♠ $x = 0$

Así f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en todo el eje imaginario.

4. Mirar si $f(z) = |z|^2$ es analítica ó holomorfa en $z = 0$.

$f(z) = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ por tanto $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = 0$ y sus derivadas parciales son:

$$\begin{array}{ll} \checkmark. & \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \checkmark. & \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \end{array} \quad \begin{array}{ll} \checkmark. & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \checkmark. & \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}$$

f es $\mathbb{R}^2$ -diferenciable

$$\begin{array}{ll} \clubsuit u_x = v_y & \spadesuit v_x = -u_y \\ \clubsuit 2x = 0 & \spadesuit 2y = 0 \end{array}$$

Así f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $z = 0$. El único punto del plano complejo donde f es $\mathbb{C}$ -diferenciable es en el origen $(0, 0)$.

5. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y existe $f'(z) \neq 0$, entonces las curvas de nivel $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$ se intersecan perpendicularmente.

Como f es diferenciable en z , entonces f es $\mathbb{R}^2$ -diferenciable y se satisfacen las **E.C.R.** En particular $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son campos escalares diferenciables, Así, $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$ definen curvas de nivel.

FALTAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

3.4. Funciones Importantes

3.4.1. Exponencial

Se tiene por la Formula de **Euler** que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, preservar la regla de los exponentes entonces

$$\begin{aligned}
 f(z) &= e^z = e^{x+iy} \\
 &= e^x e^{iy} \\
 &= e^x (\cos y + i \sin y) \\
 &= e^x \cos y + i e^x \sin y
 \end{aligned}$$

Entonces $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \sin y$ las cuales son $\mathbb{R}^2$ -diferenciable y además cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así e^z es $\mathbb{C}$ -diferenciable, también es holomorfa en $\mathbb{C}$ y e^z es entera.

Y la derivada de $f(z)$ es

$$f'(z) = e^z$$

Propiedades.

★. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

★. La exponencial compleja nunca es cero ya que para $z \in \mathbb{C}$

$$|e^z| = |e^x| |e^{iy}| = |e^x| \cdot 1 = e^x > 0$$

entonces $e^z \neq 0$

★. La exponencial compleja extiende al plano complejo, la función real e^x , si $y = 0$ entonces

$$e^z = e^{x+i0} = e^x$$

3.4.2. Trigonométricas

Las funciones $\sin z$ y $\cos z$ con $z \in \mathbb{C}$ están dadas como

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Estas dos funciones son diferenciable en todo $\mathbb{C}$, es decir son enteras, ya que se construyen a partir de operaciones de campo y composición con e^z . Las derivadas son:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\sin z) &= \frac{1}{2i} [e^{iz}i - e^{-iz}(-i)] \\
&= \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= \cos z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\cos z) &= \frac{1}{2} [e^{iz}i + e^{-iz}(-i)] \\
&= \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} \\
&= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= -\sin z
\end{aligned}$$

Propiedades.

★.

$$\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{4} (e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}) + \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}) \\
&= \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) \\
&= \frac{1}{4} (4) = 1
\end{aligned}$$

★. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

★. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$

★. $z \in \mathbb{C}$, si $y = 0$ entonces $z = x$ así

$$\sin z = \sin x$$

$$\cos z = \cos x$$

Esto quiere decir que $\sin z$ y $\cos z$ extienden al plano complejo las funciones trigonométricas de $\mathbb{R}$.

★. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

★. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

★.

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x + iy) \\
&= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\
&= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} \\
&= \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2} \\
&= \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} + (\cos x - i \sin x)e^y}{2} \\
&= \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x + e^y \cos x - ie^y \sin x}{2} \\
&= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x + i \frac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x \\
&= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x \\
&= u(x, y) + iv(x, y)
\end{aligned}$$

★.

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x + iy) \\
&= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} \\
&= \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^y}{2i} \\
&= \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x - e^y \cos x + ie^y \sin x}{2i} \\
&= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos x + i \frac{e^{-y} + e^y}{2i} \sin x \\
&= -i \frac{e^{-y} - e^y}{2} \cos x + \frac{e^{-y} + e^y}{2} \sin x \\
&= \cosh y \sin x - i \sinh y \cos x \\
&= u(x, y) + iv(x, y)
\end{aligned}$$

Teorema 6. *Si dos funciones enteras coinciden en un intervalo de la recta real entonces son iguales en todo $\mathbb{C}$.*

Nota 1. La función exponencial, el seno y el coseno complejo son las únicas funciones que extienden las funciones exponencial, seno y coseno real a los complejos.

3.4.3. Hiperbólicas

Las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ con $z \in \mathbb{C}$ están dadas como

$$\sinh z = \frac{e^{-z} - e^z}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Estas dos funciones son diferenciables en todo $\mathbb{C}$, es decir son enteras, ya que se construyen a partir de operaciones de campo y composición con e^z . Las derivadas son:

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \qquad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$$

Se cumple la identidad hiperbólica $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$. Estas son las únicas funciones que extienden el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico real al plano complejo.

3.4.4. Análisis de e^z

Observemos que para $k \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$e^{2i\pi k} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1 + i0 = 1$$

Entonces

$$e^{z+2i\pi k} = e^z e^{2i\pi k} = e^z \cdot 1 = e^z$$

Definición 3. Una función f es periódica con período P si $f(x + P) = f(x)$.

Así, e^z tiene período $i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. En particular, tiene período $2\pi k$. **La función exponencial compleja es periódica.** Tendrá la función e^z más períodos además del que encontramos. ¿?

Supongamos que $a + ib$ es un periodo de la función exponencial compleja. Así

$$\begin{aligned}
 e^{a+ib} &= 1 \\
 e^a(\cos b + i \sin b) &= 1 \\
 \Downarrow \\
 |e^{a+ib}| = |e^a| &= 1 \Rightarrow e^a = 1 \Rightarrow a = 0 \\
 b &\equiv 0 \pmod{2\pi} \Rightarrow b = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Así los únicos periodos son de la forma $ib = i2\pi k$ para e^z .

★ Como gráficas e^z . ¿?

$$w = e^z ;$$

$$w = u + iv ;$$

$$z = x + iy$$

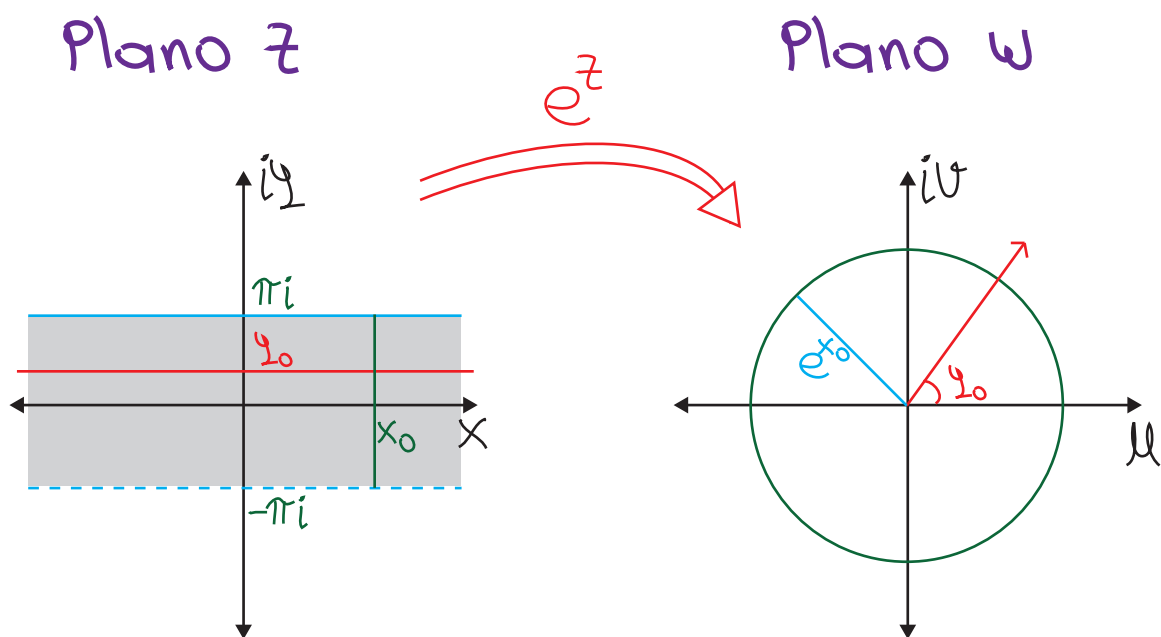


Figura 3.1: Gráfica e^z

$$w = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \Rightarrow$$

$$|w| = |e^z| = |e^x| = e^x$$

$$\arg(w) = y \bmod(2\pi)$$

$$\arg(w) = y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Simplificando el ángulo $|w| = e^x$ y $\text{Arg}(w) = y$ con $-\pi < y < \pi$.

★ Como se transforma la recta $y = y_0$. ¿?

El ángulo principal de w es constante e igual a y_0 .

$$|w| = e^x \text{ No hay condición(3.1)}$$

★ Como se transforma el segmento $x = x_0$. ¿?

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ -\pi < y < \pi &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |w| &= e^{x_0} \text{ Constante} \\ \text{Arg}(w) &= y \text{ No hay condición(3.1)} \end{aligned}$$

Así la función e^z transforma un segmento vertical en una circunferencia.

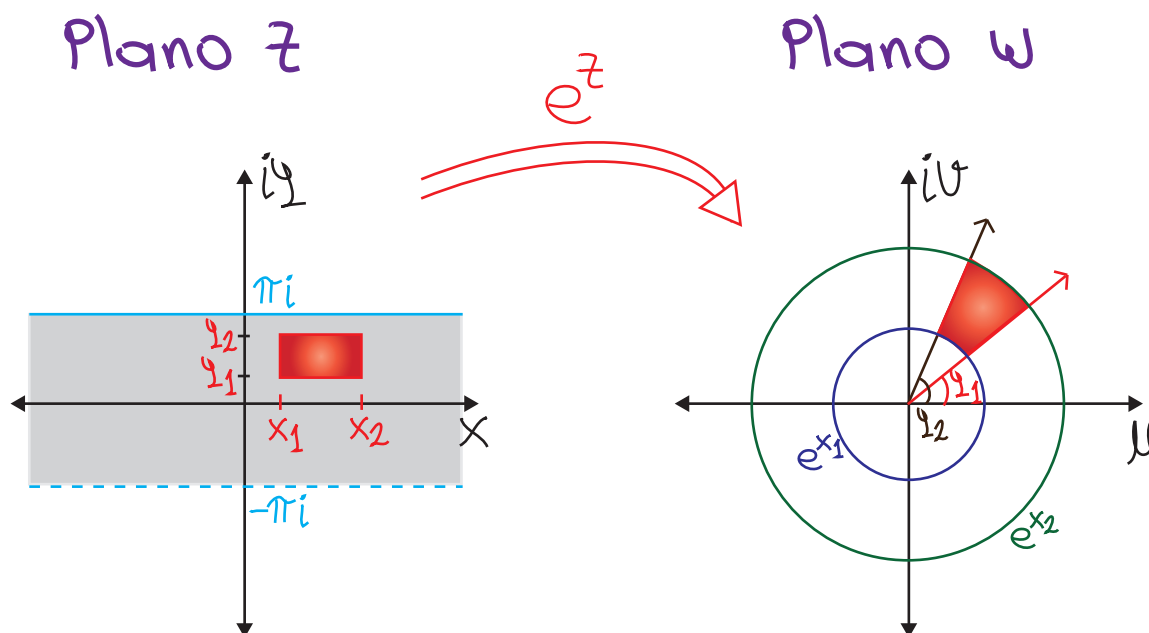
★ Como se transforma un rectángulo. ¿?

$$\text{Si } x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \text{ con } x_1 \neq x_2 \text{ y } y_1 \neq y_2. (3.2)$$

La version simplificada que estamos estudiando es la restricción de e^z a la franja $(-\infty, \infty) \times (-\pi, \pi]$, esta aplicación simplificada es inyectiva. La region fundamental muestra lo que pasa en las demás franjas, ya que cualquier otra region esta representada como modulo 2π de la region fundamental.

3.4.5. Logarítmica

La forma polar de un numero complejo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ sugiere definir:

Figura 3.2: Transformación del rectángulo con e^z

$$\begin{aligned}
 \log z &= \log(re^{i\theta}) \\
 &= \log r + \log e^{i\theta} \\
 &= r + i\theta
 \end{aligned}$$

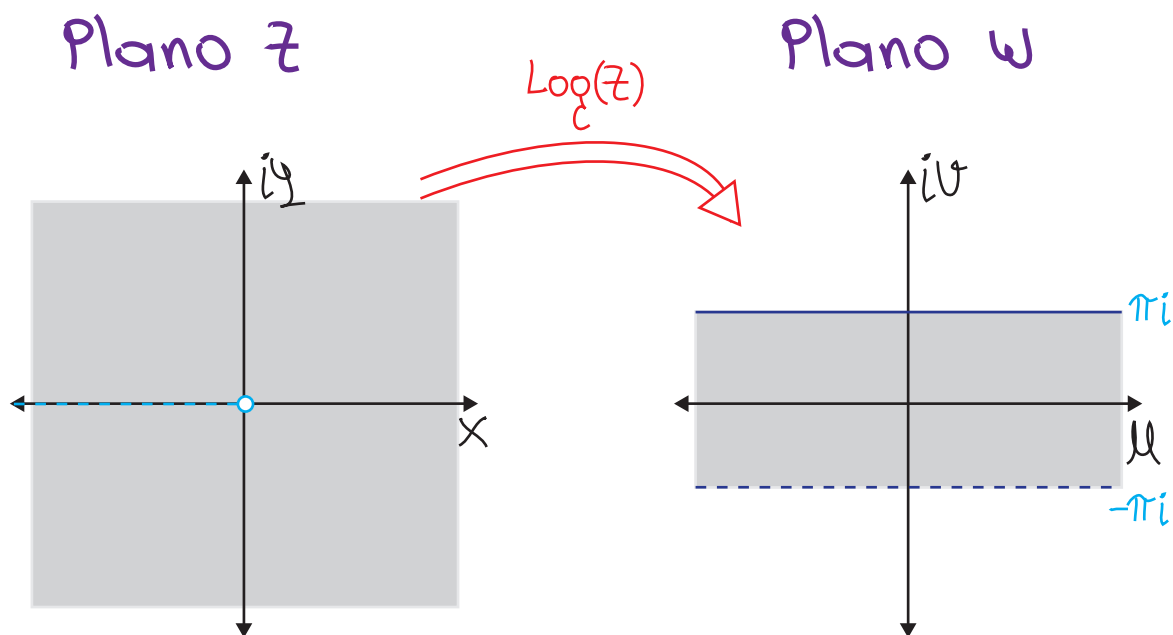
Mejor definir $w = \log z \iff e^w = z$ entonces la función logarítmica sería la inversa de la exponencial. Toca tener cuidado porque e^z no es inyectiva entonces para que exista la inversa en una función que no es biyectiva debemos restringir el dominio y el rango (si es necesario) para que esto suceda.

Para que exista al inversa de la función e^z , restringimos el dominio a la franja $F = \{z = x + iy : -\pi < \pi \leq \pi, x, y \in \mathbb{R}\}$ la restricción de e^z a F es inyectiva y así

$$\log z = \text{inversa de } e|_F$$

Logaritmo Principal ($\text{Log}z$) ó rama principal del logaritmo

El dominio de $\log : \mathbb{C}_c = \mathbb{C} - \{z = x + iy : x \leq 0\}$, $w = u + iv$; $z = re^{i\theta}$ debemos tener que

Figura 3.3: Transformación del $\log z$

$$\begin{aligned}
 e^w &= z \\
 e^{u+iv} &= x + iy \\
 e^u e^{iv} &= x + iy = r e^{i\theta} \\
 e^u (\cos v + i \sin v) &= x + iy
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{cases}
 e^u = r \Rightarrow u = \log r \\
 u = \theta \bmod(2\pi)
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Así } w &= \log z = \log r + i \arg(z) \\
 &= \log |z| + i(\theta + 2\pi k) \\
 &= \log |z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k) \text{ con } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Logaritmo Principal ($k = 0$): $\log |z| + i \text{Arg}(z)$, con $z \in \mathbb{C}_c$

Ejemplo 9.

$$\begin{aligned}
\log i &= \log |i| + i \operatorname{Arg}(i) \\
&= \log 1 + i \frac{\pi}{2} \\
&= i \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$\log z$ extiende a $\mathbb{C}_c$ la función conocida como $\log x$ ¿?

Si $z = x$ ($y = 0$), $x > 0$ $\log z = \log |x| + i \operatorname{Arg}(x) = \log x$. ✓

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_c$ entonces $\log \alpha\beta = \log \alpha + \log \beta$ ¿?

$$\begin{aligned}
\log \alpha\beta &= \log |\alpha\beta| + i \operatorname{Arg}(\alpha\beta) \\
&= \log |\alpha||\beta| + i(\operatorname{Arg}(\alpha) + \operatorname{Arg}(\beta)) \\
&= \log |\alpha| + \log |\beta| + i \operatorname{Arg}(\alpha) + i \operatorname{Arg}(\beta) \\
&= \log |\alpha| + i \operatorname{Arg}(\alpha) + \log |\beta| + i \operatorname{Arg}(\beta) \\
&= \log \alpha + \log \beta. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Es $w = \log z$ holomorfa en $\mathbb{C}$ ¿?

Teorema 7. Si $f : R \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $z_0 \in R$, inyectiva con inversa f^{-1} y $f'(z_0) \neq 0$ entonces

$$(f^{-1}(z_0))' = \frac{1}{f'(w_0)}, \quad f^{-1}(w_0) = z_0, \quad w_0 = f(z_0)$$

En verdad, $e : S \rightarrow \mathbb{C}_c$ es diferenciable, $z_0 \in S$, es inyectiva con inversa $\log$ y $e'(z_0) = e(z_0) \neq 0$.

Entonces la respuesta de la pregunta anterior. $\forall z_0 \in S$, así

$$\log'(z_0) = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{e^{\log z_0}} = \frac{1}{z_0}$$

como esto se cumple en cada $z_0 \in S$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en todo $\mathbb{C}_c$ y así, holomorfa. ✓

Otra forma de verla seria,

$$\begin{aligned}\log z &= \log |z| + i \operatorname{Arg}(z) \\ &= \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arg}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= u(x, y) + iv(x, y)\end{aligned}$$

$\log z$ es $\mathbb{R}^2$ -diferenciable en $\mathbb{C}_c$ también u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así $\log z$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

3.4.6. Potencia

$$P(z) = z^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Se define

$$P(z) = z^\alpha = e^{\log(z^\alpha)} = e^{\alpha \log z}, \quad \text{si } z \in \mathbb{C}_c$$

z^α es diferenciable y holomorfa en su dominio, ya que se obtiene a partir del campo y composición de funciones analíticas en $\mathbb{C}_c$.

$$\begin{aligned}\frac{dz^\alpha}{dz} &= \frac{d}{dz} (e^{\alpha \log z}) \\ &= e^{\alpha \log z} \frac{\alpha}{z} \\ &= z^\alpha \frac{\alpha}{z} \\ &= \alpha z^{\alpha-1}\end{aligned}$$

$$z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ ¿?}$$

$$\begin{aligned}z^{\alpha+\beta} &= e^{(\alpha+\beta) \log z} \\ &= e^{\alpha \log z + \beta \log z} \\ &= e^{\alpha \log z} e^{\beta \log z} \\ &= z^\alpha z^\beta\end{aligned}$$

Ejemplo 10. Resolver la ecuación $\log z = \frac{\pi}{4}i$

$$\begin{aligned}\log z &= \frac{\pi}{4}i \\ z &= e^{\frac{\pi}{4}i} \\ z &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\end{aligned}$$

3.5. Funciones Armónicas

Sea $x + iy \rightarrow u + iv$ una función diferenciable ó analítica es una region $R \subset \mathbb{C}$ entonces

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$$

$$f'(z) = v_y + iu_y = v_y + iv_x$$

Si f es dos veces diferenciable ($\mathbb{C}^2$ -diferenciable) podemos ver lo siguiente: $f'(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$f'(z) = \underbrace{u_x}_U - i \underbrace{u_y}_V \Rightarrow U = u_x; V = -u_y$$

$$\text{E.C.R.} = \begin{cases} U_x = V_y \Rightarrow u_{xx} = -u_{yy} \Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ U_y = -V_x \Rightarrow u_{xy} = u_{yx} \end{cases}$$

$$f'(z) = \underbrace{v_y}_U + i \underbrace{v_x}_V \Rightarrow U = v_y; V = v_x$$

$$\text{E.C.R.} = \begin{cases} U_x = V_y \Rightarrow v_{xy} = v_{yx} \\ U_y = -V_x \Rightarrow v_{yy} = -v_{xx} \Leftrightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$$

Se dice que ϕ es armónica si se cumple la **Ecuación de Laplace**

$$\underbrace{\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0}_{\text{E. Laplace}}$$

Teorema 8. Si $x + iy \rightarrow u + iv$ es diferenciable entonces

$$1. \Delta u = 0 \text{ y } u_{xy} = u_{yx}$$

$$2. \Delta v = 0 \text{ y } v_{xy} = v_{yx}$$

Ósea u y v son funciones armónicas cuyas derivadas parciales mixtas son iguales.

Ejemplo 11. $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + i \underbrace{2xy}_v$

$$u_x = 2x$$

$$u_{xx} = 2$$

$$v_{xx} = 0$$

$$u_y = -2y$$

$$u_{yy} = -2$$

$$v_{yy} = 0$$

$$v_x = 2y$$

$$u_{xy} = 0$$

$$v_{xy} = 2$$

$$v_y = 2x$$

$$u_{yx} = 0$$

$$v_{yx} = 2$$

Por lo tanto $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u_{xy} = u_{yx}$ y $v_{xx} + v_{yy} = 0$, $v_{xy} = v_{yx}$

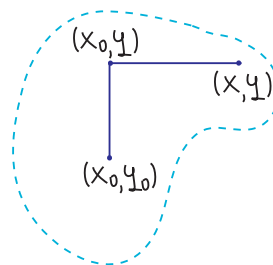
Este teorema sugiere un método para construir funciones holomorfas. Si u y v satisfacen las condiciones 1) y 2), se dice que v es el conjugado armónico de u .

Problema: Dada una función que cumpla 1), encontrar un conjugado armónico v de u .

Respuesta: Depende del dominio D donde trabajamos.

Definición 4. Un dominio D es “apropiado” si contiene un punto (x_0, y_0) tal que los segmentos (x_0, y_0) a (x_0, y) y (x_0, y) a (x, y) están totalmente contenido en D , para $(x, y) \in D$.

Problema: Sea D un dominio “apropiado”, dado u encontrar un conjunto armónico v de u .



$$u : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto u(x, y)$$

Con u armónica $u_{xy} = u_{yx}$ y v debe cumplir:

$$[\star] \quad u_x = v_y \text{ y } v_x = -u_y \quad [\boxtimes]$$

Integrando de x_0 a x a $[\boxtimes]$

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y} dx + C(y) = - \int_{x_0}^x u_y dx + C(y)$$

y ahora de $[\star]$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) + C'(y) = u_x$$

$$\int_{x_0}^x (-u_{yy}) dx + C'(y) = u_x$$

$$\int_{x_0}^x u_{xx} dx + C'(y) = u_x$$

$$u_x(x, y)|_{x_0}^x + C'(y) = u_x$$

$$u_x(x, y) - u_x(x_0, y) + C'(y) = u_x(x, y)$$

$$C'(y) = u_x(x_0, y)$$

$$C(y) = \int_{y_0}^y u_x(x_0, y) dy + C$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= - \int_{x_0}^x u_y(x, y) dx + \int_{y_0}^y u_x(x_0, y) dy + C \\ &= \int_{y_0}^y u_x(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x (-u_y(x, y)) dx + C \\ &= \underbrace{\int_{c_1}^x u_x(x_0, y) dy + \int_{c_2}^x (-u_y(x, y)) dx}_{\text{Integral de Linea}} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 12. $u = x^3 + axy^2$, $v = ?$. Existe un conjugado armónico v de u . ¿?

i. $D = \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{ii. } u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + ay^2 \\ u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = 2axy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 6x \\ u_{yy} &= 2ax \end{aligned}$$

Ahora $u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ax = x(6 + 2a) = 0 \Rightarrow a = -3$ La función es armónica si y solo si $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

iii.

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x u_y(x, y) dx + \int_{y_0}^y u_x(x_0, y) dy + C$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= - \int_0^x (-6xy) dx + \int_0^y (-3y^2) dy + C \\ &= 6y \frac{x^2}{2} \Big|_0^x - 3 \frac{y^3}{3} \Big|_0^y + C \\ &= 3yx^2 - y^3 + C \end{aligned}$$

Entonces $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3yx^2 - y^3 + C)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$.

CAPÍTULO 4

Integral Compleja

4.1. Curvas

Una curva en el plano complejo es una aplicación

$$\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \xi(t) + i\eta(t), \text{ donde } \xi, \eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

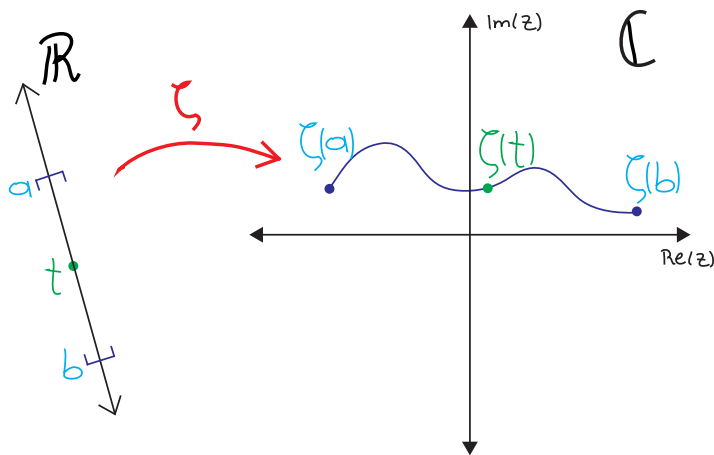


Figura 4.1: Curva $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

- ✓ ζ es continua si y solo si ξ y η son continuas.
- ✓ ζ denota tanto a la aplicación, como a su recorrido.

Tipos de Curvas

- ♣. Una curva ζ es simple si $\forall t, s \in [a, b]$ se tiene que $\zeta(t) \neq \zeta(s)$ (es decir, no se cortan a si mismo).
- ♣. Una curva ζ es cerrada si $\zeta(a) = \zeta(b)$ (punto final igual punto inicial).

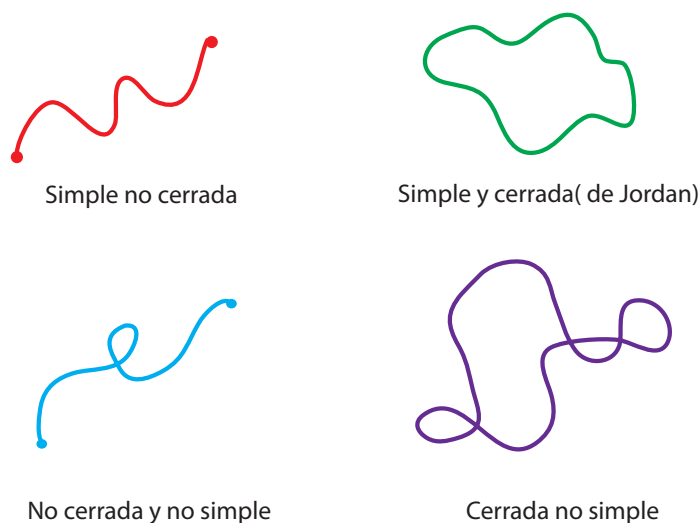
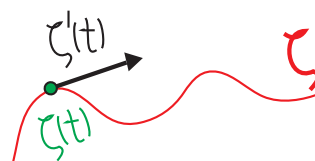


Figura 4.2: Tipos de curvas

Una arco es una curva ζ que es continuamente diferenciable (la derivada existe y es continua en $[a, b]$). En tal como

$$\zeta'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t)$$



Sea $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua de arco $C \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$. Definimos la integral de f a lo largo de C por

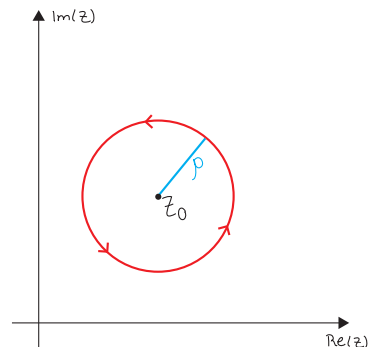
$$\int_C f(z) dz = \int_a^b \underbrace{f(\zeta(t)) \zeta'(t)}_{\text{producto compleja}} dt$$

Ejemplo 13. C : la circunferencia de radio ρ centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$. Sea $f : \mathbb{C} - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

Calcular la integral de $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$

1. Parametrizar C : $\zeta(t) = z_0 + \rho e^{i\theta}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ entonces $\zeta'(t) = i\rho e^{i\theta}$



2. Evaluamos la parametrización en la función

$$\begin{aligned} f(\zeta(t)) &= \frac{1}{z_0 + \rho e^{i\theta} - z_0} \\ &= \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \end{aligned}$$

3. Calculamos la integral

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{\rho} i \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= i2\pi \end{aligned}$$

4.2. Propiedades de la integral

1. Si $-C$ es el recorrido de C en sentido opuesto, entonces

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

2. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fijos tenemos

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz$$

3. Los arcos $C_1, C_2, \dots, C_n$ forman un contorno C si C_j comienza donde termina C_{j-1} ; $j : 2, \dots, n$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz$$

Teorema 9. (*Independencia del camino para tomar la integral*). Si $F(z)$ tiene derivada conocida $F'(z)$ en el arco C , entonces

$$\int_C F'(z) dz = F(z) \Big|_{\zeta(a)}^{\zeta(b)} = F(\zeta(b)) - F(\zeta(a))$$

donde $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización de C

Demostración.

(T.F. calculo)

$$\begin{aligned} \int_C F'(z) dz &= \int_a^b F'(\zeta(t)) \zeta'(t) dt && \text{si } u = F(\zeta(t)) \\ &= \int_a^b dF(\zeta t) && du = F'(\zeta(t)) \zeta'(t) dt \\ &= F(\zeta(t)) \Big|_a^b && dF = F'(\zeta(t)) \zeta'(t) dt \end{aligned}$$

◇

Este teorema facilita el cálculo de las integrales de funciones conocidas.

Teorema 10. Con las mismas hipótesis del teorema si C es un arco cerrado, entonces

$$\begin{aligned} \int_C F'(z) dz &= F(\zeta(b)) - F(\zeta(a)) \\ &= F(\zeta(a)) - F(\zeta(a)); \text{ por ser } C \text{ cerrada} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 14.

•.

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{z_1}^{z_2}$$

•.

$$\int_{z_1}^{z_2} e^z dz = e^{z_1} - e^{z_2}$$

•.

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin z dz = -\cos z_2 + \cos z_1$$

4.3. Mas propiedades de la integral

1. **Estimación estándar:** Sea $f(z)$ continua en un arco C (compacto). Sea $\zeta(t)$ con $a \leq t \leq b$, una parametrización de C . Por definición

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt$$

para acotarla utilizamos la desigualdad triangular

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\zeta(t))| |\zeta'(t)| dt$$

si $|f(\zeta(t))| < M \forall t \in [a, b]$, entonces M es una cota superior de $|f(z)|$ en C , entonces

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \underbrace{\int_a^b |\zeta'(t)| dt}_{\text{Longitud del arco } \zeta}$$

Teorema 11. Si $f(z)$ es continua en C , entonces

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| \leq ML,$$

donde M es una cota superior de $|f(z)|$ en la curva C , y L es la longitud de C .

2. **Invarianza respecto a la parametrización:** Sea C_1 un arco en $\mathbb{C}$, $\zeta_1(t)$ una parametrización de C_1 con $a \leq t \leq b$. Sea también $\delta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un difeomorfo. Sea C_2 el arco dado por $\zeta_2(\tau) = (\zeta_1 \circ \delta)[c, d] \rightarrow C_2 = C_1$.

$$\int_{C_1} f(z) dz = \pm \int_{C_2} f(z) dz,$$

para toda función f continua en $C_1 = C_2$

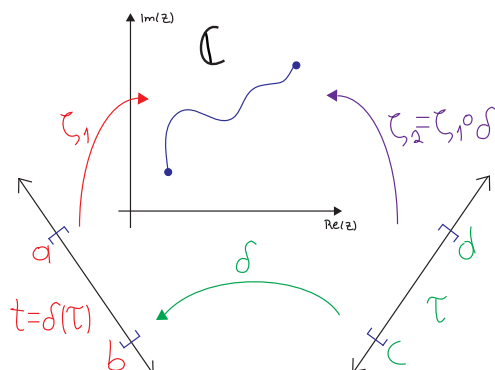


Figura 4.3: Invarianza respecto a la parametrización

Demostración.

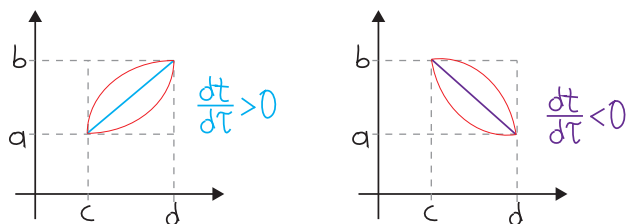
$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_c^d f(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \zeta_2(\tau) &= (\zeta_1 \circ \delta)(\tau) \\ &= \zeta_1(\delta(\tau)) \\ &= \zeta_1(t) \\ \zeta_2'(\tau) &= \zeta_1'(\delta(\tau)) \delta'(\tau) \\ &= \zeta_1'(\delta(\tau)) \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} \\ &= \zeta_1'(\delta(\tau)) \frac{dt}{d\tau} \\ \zeta_2'(\tau) d\tau &= \zeta_1'(\delta(\tau)) dt \end{aligned}$$

Así

$$\int_c^d f(\zeta_2(\tau)) \zeta_2'(\tau) d\tau = \int_a^b f(\zeta_1(t)) \zeta_1'(t) dt$$

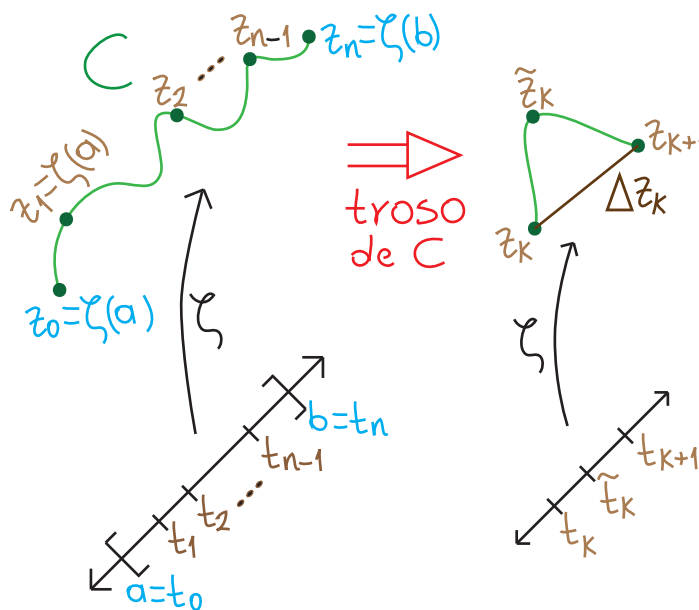
◇

Figura 4.4: Posibilidades de $\delta(\tau) = t$

3. La forma correcta de entender la integral compleja:

Particionado el arco C en subarcos $[Z_k, Z_{k+1}]$, con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Si $\zeta(\tau)$ es una parametrización de C , esta partición proviene de la partición (t_k, t_{k+1}) de $[a, b]$.

f continua en C considerar las sumas $\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k = J$.



Al hacer que la partición sea cada vez mas fina, $n \rightarrow \infty$, $\Delta t_k \rightarrow 0$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, J tiende a un único limite J_0 que es independiente de la forma como definamos las particiones.

$$J_0 = \int_C f(z) dz$$

Ejemplo 15. $\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_C F'(z) dz$ ya que si $F(z) = \log z - a$ entonces $F'(z) = \frac{1}{z-a}$. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{z_1}^{z_2} F'(z) dz = F(z_2) - F(z_1) = \log(z_2 - a) - \log(z_1 - a)$$

1. Donde C es cualquier arco que une z_1 con z_2 y esquiva a a .

Problema: Eje real negativo. $F(z)$ no es continua en el eje real negativo.

Solución:

2. Consideremos solamente el arco $\zeta(t)$ de z_1 a z_2 tales que

$$\phi(t) = \log(\zeta(t) - a)$$

es continua a lo largo de ellos.

Asumiendo 1) y 2), obtenemos que

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z-a} = \log(z_2 - a) - \log(z_1 - a).$$

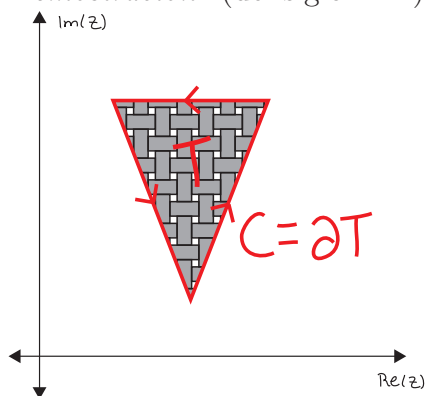
Que sucede si $z_1 = z_2$, es decir C es cerrado. ¿?

4.4. Acercamiento al teorema de Cauchy

Teorema 12. Sea T una region triangular (triángulo compacto) contenida en el dominio de una función analítica u holomorfa f . Sea $C = \partial T$ la frontera de T recorrida en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Entonces

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Demostración. (del siglo XIX).



T un triángulo compacto cualquiera en el dominio de f .

$$f : T \subset D \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa en } D$$

Así,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con u, v continuamente diferenciables en D y

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C [(udx - vdy) + i(vdx + udy)] \\ &= \underbrace{\int_C (udx - vdy)}_{\text{parte real} \spadesuit} + i \underbrace{\int_C (vdx + udy)}_{\text{parte imaginaria} \clubsuit} \end{aligned}$$

$$\spadesuit \quad \int_C (u dx - v dy) = \int_C (u, -v)(dx, dy)$$

$$\begin{aligned} \text{Teorema de Green} &= \int \int_R \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int \int_T \text{rot}(u, -v) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E.C.R.} &= - \int \int_T (v_x + u_y) dx dy \\ &= - \int \int_T 0 dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \clubsuit \quad \int_C (v dx + u dy) &= \int \int_T \text{rot}(v, u) dx dy \\ &= \int \int_T \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v & u \end{vmatrix} dx dy \end{aligned}$$

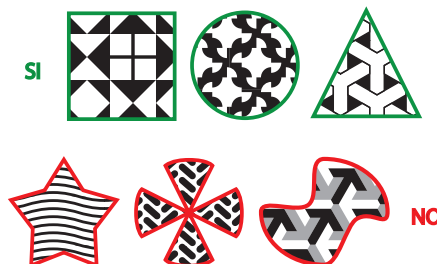
$$\begin{aligned} \text{E.C.R.} &= \int \int_T (u_x - v_y) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_C f(z) dz = 0 + i0 = 0$$

◇

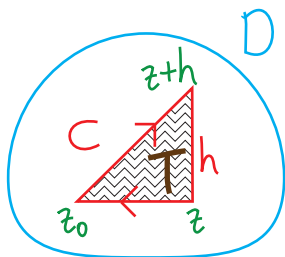
Definición 5. Un dominio D es estrellado en z_0 si $z_0 \in D$ y $\forall z \in D$ el segmento recto que une a z_0 con z está contenido en D .



Teorema 13. Si f es holomorfa en un dominio estrellado D , entonces existe una función F holomorfa en D tal que $F' = f$.

Demostración. Sea D estrellado en z_0 sea también

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$



queda claro que el arco que une z_0 con z es $\overline{z_0 z}$. Sea $z \in D$, y h con $|h|$ suficientemente pequeño para que $z + h \in D$. Por el teorema anterior

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= 0 \\
\int_{z_0}^z f(z)dz + \int_z^{z+h} f(z)dz + \int_{z+h}^{z_0} f(z)dz &= 0 \\
\int_z^{z+h} f(z)dz &= - \int_{z+h}^{z_0} f(z)dz - \int_{z_0}^z f(z)dz \\
&= \int_{z_0}^{z+h} f(z)dz - \int_{z_0}^z f(z)dz \\
&= F(z+h) - F(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta - f(z) \\
&= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \frac{f(z)}{h}h \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z)d\zeta \right) \\
&= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \\
\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} ML \\
&= \frac{1}{|h|} M|h| \\
&= M,
\end{aligned}$$

con M una cota superior de $|f(\zeta) - f(z)|$ en $\overline{z, z+h}$. Como f es holomorfa, f es continua. Es decir, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$\text{si } |\zeta - z| < \delta \longrightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

Así,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

en resumen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D$$

◇

4.5. Teorema Integral de Cauchy

Teorema 14. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y D es un dominio estrellado, entonces

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno cerrado $C \subset D$.

Demostración. Por lo anterior existe una función holomorfa $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F' = f$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C F'(z) dz \\ &= F(z_2) - F(z_1) \\ \text{camino cerrado} &= F(z_1) - F(z_1) = 0 \end{aligned}$$

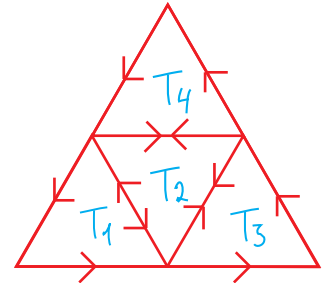
◇

Teorema 15. *Cauchy-Goursat.* Sea T una región triangular cerrada en el dominio de una función holomorfa f . Si $C = \partial T$ recorrida en el sentido positivo, entonces

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Demostración.

Paso 1. Usemos los puntos medios de los lados de T , para dividir a T en 4 subtriángulos T_1, T_2, T_3 y T_4 con fronteras C_1, C_2, C_3 y C_4 respectivamente.



$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz$$

Por lo tanto

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \underbrace{\left| \int_{C_1} f(z)dz \right| + \left| \int_{C_2} f(z)dz \right| + \left| \int_{C_3} f(z)dz \right| + \left| \int_{C_4} f(z)dz \right|}_{\text{Elegir el máximo entre ellos}}$$

Sea C_1 la frontera del subconjunto que produce la integral maxima. Así

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z)dz \right|$$

Sea T_1 el subconjunto de frontera C_1 , ósea $T_1 = T_4$ y se le hace el mismo tratamiento a T_1 que se le hizo a T :

$$\left| \int_{C_1} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_2} f(z)dz \right|$$

para cierto subtriángulo T_2 de T_1 con frontera C_2 . Observamos que

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z)dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{C_2} f(z)dz \right|$$

En general, si $T = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \dots \supset T_n$ entonces

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z)dz \right|$$

Paso 2. Utilizando el *Teorema de Cantor*(ó del encajamiento): Como $T = T_0$, $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \dots$ y los T_i son todos compactos, entonces

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} T_i \neq \emptyset$$

es decir, existe $\xi \in \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i$. Ya que $\xi \in T_0$, y T_0 esta en el dominio de f (holomorfa), $f'(\xi)$ existe (f es diferenciable en ξ) es decir

$$f'(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \text{ EXISTE}$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |\xi - z| < \delta \text{ entonces } & \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(\xi) \right| < \varepsilon \\ & \frac{|f(\xi) - f(z) - f'(\xi)(\xi - z)|}{|\xi - z|} < \varepsilon \\ & -\varepsilon|\xi - z| \leq |f(\xi) - f(z) - f'(\xi)(\xi - z)| \leq \varepsilon|\xi - z| \end{aligned}$$

Se tiene por el *Teorema del Valor Intermedio*:

$$f(\xi) - f(z) - f'(\xi)(\xi - z) \equiv w(z)(\xi - z)$$

donde $w(z)$ es tal que $|w| < \varepsilon$. Y despejando

$$f(z) = f(\xi) + f'(\xi)(\xi - z) + w(z)(\xi - z)$$

para ξ suficientemente pequeño.

Paso 3. Elegir n lo suficientemente grande para que $T_n \subset B_\delta(\xi)$

$$\begin{aligned} \int_{C_n} f(z)dz &= \int_{C_n} f(\xi)dz + \int_{C_n} f'(\xi)(\xi - z)dz + \int_{C_n} w(z)(\xi - z)dz \\ &= f(\xi) \int_{C_n} dz + f'(\xi) \int_{C_n} (\xi - z)dz + \int_{C_n} w(z)(\xi - z)dz \\ &= \int_{C_n} w(z)(\xi - z)dz \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{C_n} w(z)(\xi - z)dz \right| \leq ML$$

M : Cota superior de $|w(z)(\xi - z)|$ en C_n .

L : Longitud de $C_n = S_n$.

S_n : Perímetro del triángulo.

Qué poner como M ?

$$M = \xi S_n$$

En resumen

$$\left| \int_{C_n} f(z)dz \right| \leq \varepsilon S_n^2$$

Notemos que $S_n = \frac{1}{2}S_{n-1}$, y así $S_n = \frac{1}{2^n}S_0 = \frac{1}{2^n}S$, con $S = S_0$ es la longitud de $C = \partial T$. Con esto

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z)dz \right| \\ &\leq 4^n \varepsilon S_n^2 \\ &\leq 4^n \varepsilon \left(\frac{1}{2^n} S \right)^2 \\ &\leq 4^n \varepsilon \frac{1}{4^n} S^2 \\ &\leq \varepsilon S^2 \end{aligned}$$

S : Cantidad fija: Perímetro de T .

ε : Puede hacerse tan cercano como queramos.

Al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces

$$\left| \int_C f(z)dz \right| = 0, \text{ es decir } \int_C f(z)dz = 0$$

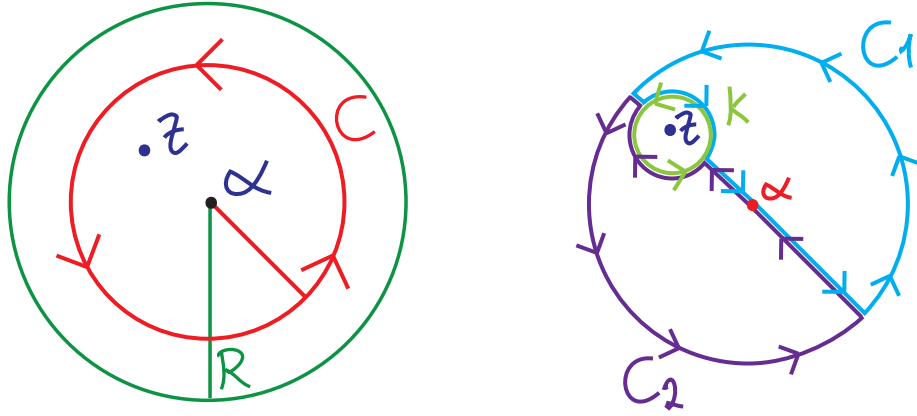
◇

4.6. Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 16. *Fórmula Integral de Cauchy* Sea f holomorfa en el disco $|z - \alpha| < R$, y C la circunferencia $|z - \alpha| = \rho < R$. Sea z tal que $|z - \alpha| < \rho$. Entonces

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z) \quad \text{ó} \quad \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a)$$

Demostración. Ya que $z \notin C_1$, $z \notin C_2$ así $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ es una función holomorfa en todos los



puntos dentro de C_1 y C_2 . Por tanto las integrales de las izquierdas se anulan.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=0} + \underbrace{\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=0} &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 0 &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \int_k \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \int_k \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_k \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= f(z) \int_k \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\int_k \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta}_A \\
 &= f(z) 2\pi i + A
 \end{aligned}$$

Ahora

$$|A| = \left| \int_k \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq L_k \sup_k \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right|$$

Como f es holomorfa, f es continua, ósea $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\text{Si } |\zeta - z| < \delta \text{ entonces } |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

Sea $b = \text{radio de } k < \delta$. Así $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ como $0 < b < \delta$, entonces $\frac{1}{\delta} < \frac{1}{b}$. Entonces

$$0 \leq |A| < 2\pi b \frac{\varepsilon}{b} \Rightarrow 0 \leq |A| < 2\pi \varepsilon$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $|A| = 0 \Rightarrow A = 0$. En conclusión

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

◇

Teorema 17. *Supongamos que f es holomorfa en un dominio D . Entonces, $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots$ existen y son holomorfa en D . Además,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

donde C es una circunferencia contenida en D .

Demostración. Sabemos que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ahora derivamos con respecto a z

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_C \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta}_{\text{Intercambio de la integral con la derivada}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) (-1) (\zeta - z)^{-2} (-1) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}$$

Para la segunda derivada

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) (2) (\zeta - z)^{-3} d\zeta \\ &= \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \end{aligned}$$

Por inducción

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

◇

Corolario 1. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en D , las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ poseen derivadas parciales de todos los ordenes.

Ejemplo 16. Calcule

$$\int_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + 1} dz$$

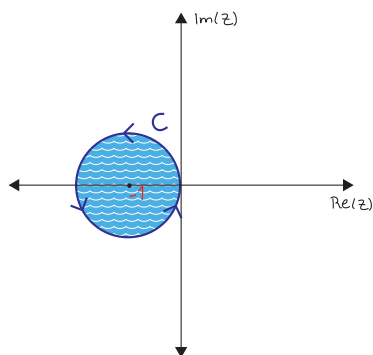
a. Si C es la circunferencia $|z + 1| = 1$.

b. Si C es la circunferencia $|z + i| = 1$.

Solución:

a. En este caso $f(z) = 3z^2 + 7z + 1$, $z = -1 \in C$ y además $f(z)$ es holomorfa en C .

Por lo tanto



$$\begin{aligned} \int_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + 1} dz &= 2\pi i f(-1) \\ &= 2\pi i (3(-1)^2 + 7(-1) + 1) \\ &= 2\pi i (3 - 7 + 1) \\ &= -6\pi i \end{aligned}$$

b. La función $F(z) = \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + 1}$ es holomorfa en el disco $|z + i| = 1$. Por lo tanto

$$\int_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + 1} dz = 0 \text{ por Teorema de Cauchy-Goursat}$$

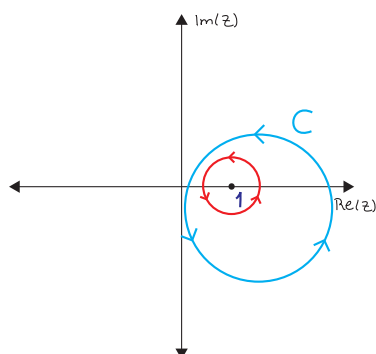
Ejemplo 17. Calcule los valores posibles de

$$\int_C \frac{\zeta^3 + 3}{\zeta - 1}$$

donde C es la circunferencia en $\mathbb{C}$.

Solución:

$f(z) = z^3 + 3$ es un polinomio y así holomorfa en $\mathbb{C}$. Quien es C ?



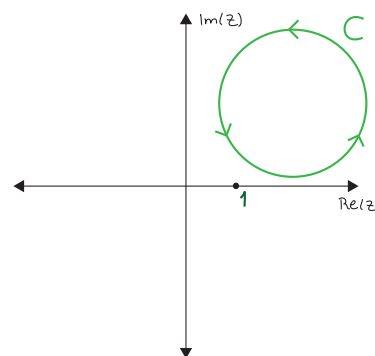
1. Si C encierra a $z = 1$, en este caso,

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\zeta^3 + 3}{\zeta - 1} dz &= 2\pi i f(1) \\ &= 2\pi i ((1)^3 + 3) \\ &= 2\pi i (4) \\ &= 8\pi i\end{aligned}$$

2. Si $z = 1$ está fuera de la región encerrado por C

$$\int_C \frac{\zeta^3 + 3}{\zeta - 1} = 0,$$

por el teorema integral de Cauchy



3. Si $z = 1 \in C$: No sabemos

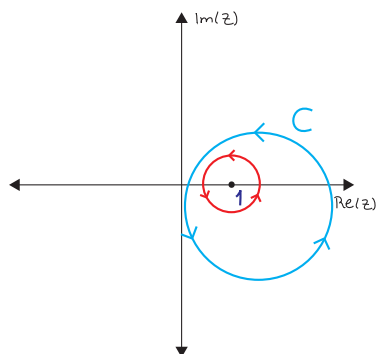
Ejemplo 18. Calcule

$$\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2}$$

1. Si C es la circunferencia $|z+1| = 3$.

2. Si C es la circunferencia $|z-2| = 1$.

Solución:



1. $f(z) = e^z$ es una función entera, y además $z = -1 \in C$ (ya que $|-1 + \frac{1}{2}| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 3$). Por lo tanto

$$\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = 2\pi i e^{-1} = \frac{2\pi i}{e}$$

2. Si $C = |z - 2| = 1$ entonces $z = -1$ no está en el interior de C . Así

$$\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2} = 0 \text{ T.I.C.}$$

4.7. Consecuencias

Teorema 18. *Estimación de Cauchy. Si f es holomorfa y acotada en el disco $|z - \alpha| < R$, entonces*

$$|f^{n+1}(\alpha)| < \frac{Mn!}{R^n}; \quad \forall z \text{ en dicho disco}$$

Donde M es una cota superior de $|f(z)|$ en el disco.

Demostración. Sea $\rho < R$, sabemos que si $z : |z - \alpha| < \rho$ entonces

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(\alpha)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi i} \sup_C \left\{ \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} \right| \right\} (\text{longitud de } C) \\ &\leq \frac{n!}{2\pi i} \sup_C \left\{ \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} \right| \right\} (2\pi\rho) \\ &\leq n!M \frac{1}{\rho^{n+1}} \rho \\ &\leq \frac{n!M}{\rho^n}; \text{ si } \rho \rightarrow R \text{ entonces} \\ &\leq \frac{n!M}{R^n} \end{aligned}$$

◇

Teorema 19. *de Liouville. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera (holomorfa en $\mathbb{C}$), y acotado, entonces f es una constante.*

Demostración. Tomemos un disco de radio ρ centrado en O . Por el teorema anterior tenemos que:

$$|f'(O)| \leq \frac{0!M}{\rho^{0+1}} = \frac{M}{\rho}$$

donde M es la cota de $|f(z)|$ en $\mathbb{C}$. Si $\rho \rightarrow +\infty$ entonces

$$\begin{aligned} |f'(O)| &\leq \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{M}{\rho} \\ 0 &\leq |f'(O)| \leq 0 \\ &\Downarrow \\ f'(O) &= 0 \end{aligned}$$

El mismo argumento es válido cuando $z = \alpha$, es decir $f'(\alpha) = 0$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Es decir $f' \equiv 0$ en $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ conexo, entonces $f(z) = cte$ $\diamond$

Teorema 20. *Fundamental del Álgebra. Un polinomio no constante en la variable compleja son de la forma*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_k \in \mathbb{C} \quad k = 0, \dots, n.$$

Los polinomios en los complejos son algebraicamente cerrados. (Cada ecuación polinómica compleja de grado n , con coeficientes complejos, tiene n raíces en el cuerpo de los complejos).

Demostración. Notemos que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)|$, ya que $P(z)$ no es constante. Procedamos por contradicción. Asumamos que $P(z)$ no tiene ningún cero complejo, osea $P(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. En vista de lo anterior

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

esto implica que $\frac{1}{P(z)}$ es acotado y entero. Por el teorema de *Liouville*

$$\frac{1}{P(z)} = Cte \Rightarrow P(z) = Cte \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

$\diamond$

Corolario 2. $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ admite una factorización de la forma

$$P(z) = B(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n)$$

con $B, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$.

Demostración. Como $P(z)$ no es constante, tiene un cero $b_1 \in \mathbb{C}$, entonces por el teorema del factor implica que

$$P(z) = A(z - b_1)q_{n-1}(z),$$

donde $q_n - 1$ es un polinomio de grado $n - 1$. Ahora ahceindo el mismo proceso para $q_j(z)$, $j = 2, \dots, n - 1$ llegamos a la respuesta buscada. $\diamond$

Teorema 21. *de Morera. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua, tal que para todo triangulo cerrado (frontera) $C \subseteq D$ se tiene que*

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

entonces f es holomorfa en D .

Demostración. Sea $\alpha \in D$, tomemos $\rho > 0$ tal que el disco abierto $|z - \alpha| < \rho$ este contenido en D . Llamemos a este disco G . G es estrellado. Por hipótesis, a lo largo de la frontera C de un triangulo cualquiera en G ,

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Por lo visto, $f(z)$ tiene una primitiva en G . Es decir, existe F holomorfa en G tal que $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in G$. Como $F(z)$ es holomorfa, $f^{(n+1)}(z)$, $n \in \mathbb{N}$ es holomorfa y continua en todo D . Asi $f(z)$ es holomorfa en D . $\diamond$

Proposición 3. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con D estrellado. Las dos afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es holomorfa en D .*
2. *f es continua y $\int_C f(z)dz = 0$, donde C es la frontera de un triangulo cualquiera en D , para todo triangulo T .*

1) $\rightarrow$ 2) *Teorema integral de Cauchy.* 2) $\rightarrow$ 1) *Teorema de Morera.*

Serie de Taylor de una función holomorfa

En analisis, una funcion analitica es una funcion que se puede representar por una serie de potencias cerca a α , es decir

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - \alpha)^k$$

para $|z - \alpha| < \rho$ y $a_k \in \mathbb{C}$.

[En la variable real]:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Lo anterior conduce a que

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + a_3(z - \alpha)^3 + \dots$$

Qué quiere decir esto?

Consideremos las sumas parciales

$$\begin{aligned} s_0(z) &= a_0 \\ s_1(z) &= a_0 + a_1(z - \alpha) \\ s_2(z) &= a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 \\ &\vdots \\ s_n(z) &= a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + a_3(z - \alpha)^3 + \dots + a_n(z - \alpha)^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de sumas parciales. Convergencia de $\{s_n(z)\}$ para algún $z \in R$ (region). Decimos que $s_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ en R si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $z \in R$ entonces $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Cuando esto sucede entonces se escribe que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - \alpha)^k \text{ en } R.$$

Teorema 22. Sea $f(z)$ holomorfa en $|z - \alpha| < R$, sea $0 < \rho < R$. Entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - \alpha)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n)}(\alpha)}{k!} (z - \alpha)^k \text{ uniformemente } |z - \alpha| \leq \rho.$$

Osea, f se puede representar en serie de Taylor en $|z - \alpha| \leq \rho$. Es decir, f es analítica en el disco cerrado centrado en α y de radio ρ .

Demostración. Observacion: $h(z) = f(z + \alpha)$. Debemos probar que

$$h(z) = f(z + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} z^k, \quad |z| \leq \rho$$

Tomemos $0 < \rho_1 < \rho$ y $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho_1\}$. Fórmula integral de Cauchy

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Recordemos que si $w \neq 1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$\frac{1 - w^n}{1 - w} = 1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$$

Tomemos $w = \frac{z}{\zeta} \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} &= 1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n}{1 - \frac{z}{\zeta}} \\ &= 1 + \frac{z}{\zeta} + \frac{z^2}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \frac{z^n}{\zeta^n \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)} \end{aligned}$$

si multiplicamos por $\frac{1}{\zeta}$ entonces:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \dots + \frac{z^{n-1}}{\zeta^n} + \frac{z^n}{\zeta^n(\zeta - z)}$$

De este modo, $h(z)$ es igual a:

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{\zeta^n} + \frac{z^n}{\zeta^n(\zeta - z)} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{k+1}} z^k d\zeta + \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} z^n d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{k+1} - 0} d\zeta + z^n \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} z^k \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{2\pi i} z^n \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta \end{aligned}$$

Usamos la estimacion estandar

$$\lim_{h \rightarrow \infty} z^n h_n(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta = 0$$

Hemos probado que

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

pero $h(0) = f(0 + \alpha) = f(\alpha)$, $h^{(k)}(0) = f^{(k)}(\alpha)$. Asi

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} z^k$$

con $|z| < \rho_1$ y para finalizar, $\rho_1 \rightarrow \rho$. ◇

Teorema 23. *Sea f una funcion holomorfa en un disco $|z - \alpha| < \rho$. Entonces la serie obtenida diferenciando la serie de Taylor de f converge uniformemente a f' en cada disco $|z - \alpha| < \rho \leq R$. Mas aun, la serie derivada es la serie de Taylor de f' . Es decir,*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} k(z - \alpha)^{k-1} \\ f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (z - \alpha)^k \end{aligned} \qquad \qquad \qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{(k-1)!} (z - \alpha)^{k-1}$$

Ejemplo 19. Halle la serie de Taylor de $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$

k	$\cos^{(n)} z$	$\cos^{(n)} 0$
0	$\cos z$	1
1	$-\sin z$	0
2	$-\cos z$	-1
3	$\sin z$	0
4	$\cos z$	1
5	$-\sin z$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Así

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos 0 + \frac{\cos' 0}{1!}(z - 0) + \frac{\cos'' 0}{2!}(z - 0)^2 + \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}, \quad z \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

De la misma forma, se puede construir la serie de Taylor del seno complejo:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Bibliografía

- [1] Levinson, N. and Redheffer, R. M. Complex Variables. Holden-Day Inc., San Francisco, 1970.
- [2] Choudrahy, B. The Elements of Complex Analysis. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [3] Palka, B. P. An Introduction to Complex Function Theory. Springer, New York, 1991.